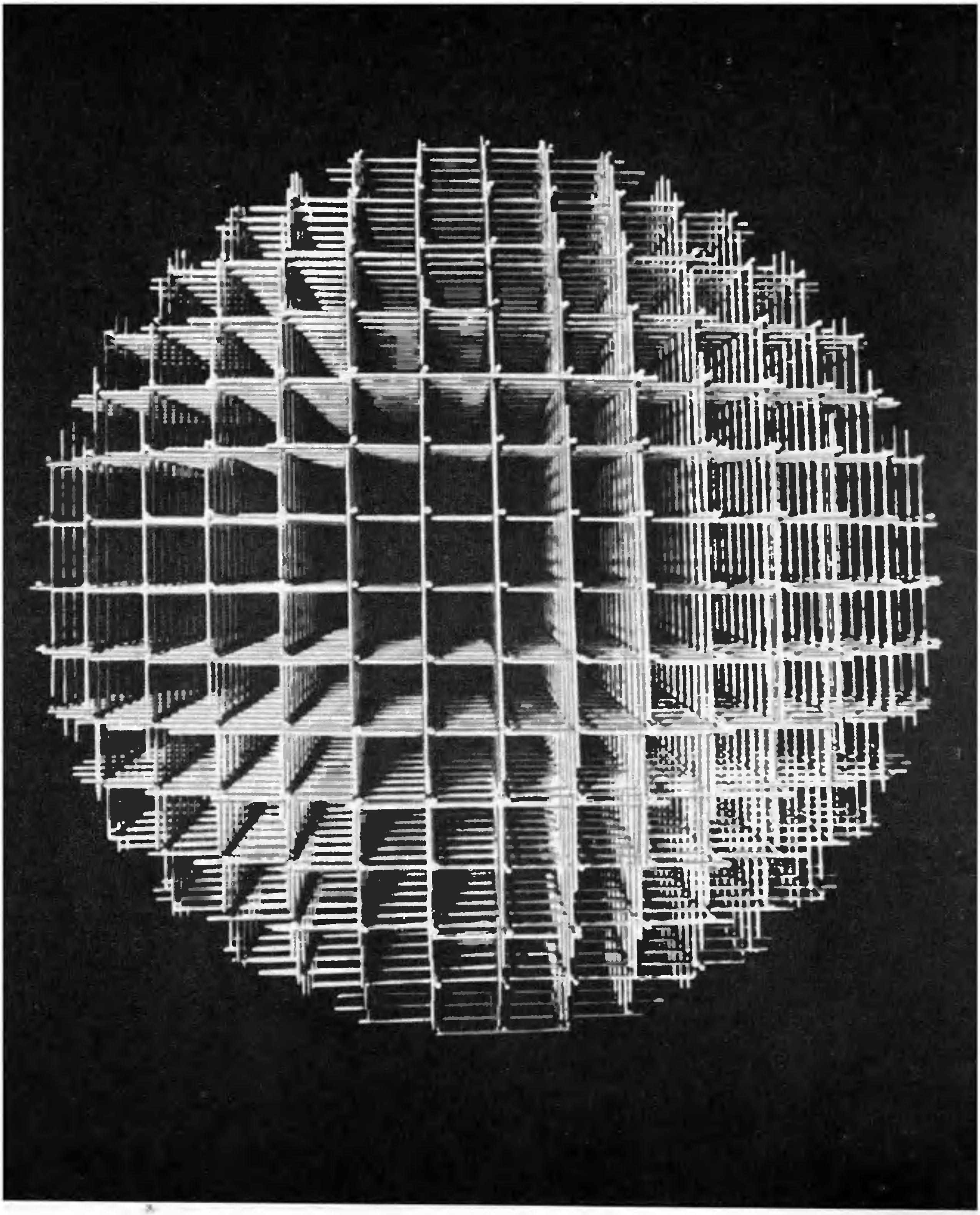
ISSN 0130-2221

КВАНТ

11
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



На фотографии изображена декоративная структура, созданная французским дизайнером Франсуа Мореллэ в 1962 г. Пространство сферы, диаметра около двух метров, заполнена кубической решеткой из алюминиевых трубок. При вращении сферы или ее обходе зрителем, наблюдаются своеобразные превращения пространственных образов, связанных с симметриями кубической структуры.

В. Колейчук

Основан в 1970 году

Квант

11
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки изображено объединение пяти конгруэнтных симметрично расположенных икосаэдров, видимые части одного из них выделены цветом

Л. Ашкинази

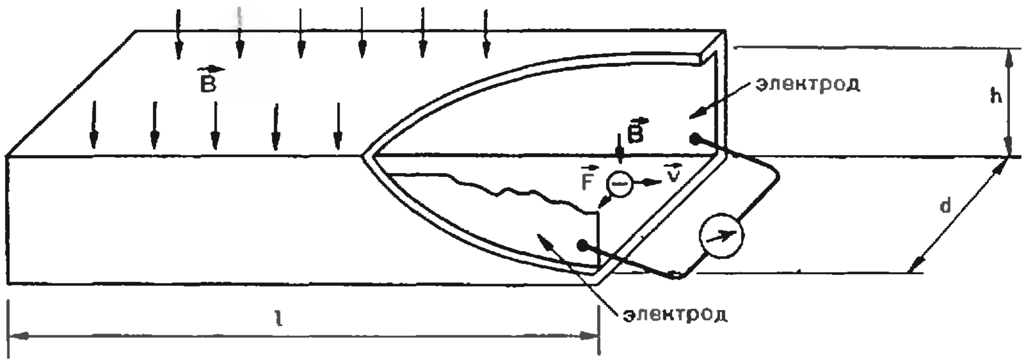
МГД-генератор

Человеческое общество не может жить без энергии. Пока основной источник энергии для человека — природное топливо: уголь, нефть, газ. Но запасы этого топлива невечны. Правда, мы знаем другие источники энергии — Солнце и атом. В будущем основными источниками станут именно они, но их освоение требует времени, а запасы природного топлива тем временем убывают. Как эффективнее использовать эти запасы? Естественное предложение — повышать коэффициент полезного действия устройств, преобразующих энергию природного топлива в электрическую энергию. Немаловажным преимуществом преобразования энергии с высоким КПД является уменьшение загрязнения окружающей среды.

Как известно, КПД тепловой машины увеличивается при увеличении максимальной и уменьшении минимальной температур рабочего тела. Но минимальная температура ограничена снизу — это температура окружающей среды. Чем ограничена сверху максимальная температура? Прочностью лопастей турбин — ибо прочность всех металлов падает с ростом температуры, а на быстродвижущиеся детали приходятся наибольшие нагрузки. Лопасти турбин ТЭС работают «на пределе», и одна из основных забот турбостроителей — получение материалов, обладающих высокой прочностью при высоких температурах. В лучших ТЭС достигнут КПД 35—40%.

Если мы хотим увеличить КПД за счет повышения температуры рабочего тела, надо искать способ преобразования энергии горячего газа в электрическую энергию, не требующий от материалов высокой прочности.

Однажды на мосту через Темзу стоял человек и пытался измерить разность потенциалов между двумя



электродами, опущенными в воду. Однако разность потенциалов получилась равной нулю, и огорченный Майкл Фарадей (а это был именно он) пошел домой. Неудача Фарадея объяснялась лишь низкой чувствительностью приборов, которыми он пользовался. А разность потенциалов существовала, и она была измерена спустя 19 лет физиком Волластоном. И тогда же Уильям Томсон (лорд Кельвин) предложил использовать этот эффект для преобразования энергии движения морской воды во время приливов в электрическую энергию.

Так были заложены идейные основы нового метода преобразования энергии, который дает возможность использовать природное топливо с бóльшим КПД, чем в традиционных ТЭС. Этот метод называют магнитогидродинамическим.

МГД-генератор

Представим себе трубу, сделанную из электроизолирующего материала и имеющую на двух противоположных стенках изнутри проводящие электроды. Труба помещена в магнитное поле. Внутри трубы движется струя горячего газа. Такова принципиальная схема магнитогидродинамического генератора — МГД-генератора. (Движение горячей струи газа во многих отношениях похоже на движение жидкости. Отсюда — название и самого метода, и генератора.) В МГД-генераторе механическая энергия движущегося горячего газа преобразовывается в электрическую энергию. Посмотрим, как это делается.

Пусть для определенности газ в МГД-канале (так называют трубу с электродами на внутренних стенках) движется слева направо со скоростью $\vec{v}$, а индукция $\vec{B}$ магнитного поля направлена так, как показано на рисунке.

Если в газе, движущемся по МГД-каналу, есть свободные электроны, то под действием силы Лоренца $F=evB$ они будут дрейфовать в газе по направлению к ближайшему к нам (на рисунке) электроду и скапливаться на нем. В результате между электродами на стенках МГД-канала будет создаваться разность потенциалов. Если мы подключим к электродам какую-нибудь электрическую нагрузку, то по цепи нагрузки будет протекать ток.

Итак, задача решена — поместив поток горячего газа в трубу с двумя электродами и магнитное поле, мы сделали генератор электрической энергии.

Механизм возникновения тока в МГД-генераторе такой же, как и в любом электрическом генераторе — ток возникает в проводнике, движущемся в магнитном поле. Но только в электрических генераторах эти проводники металлические, твердые, а в МГД-генераторе это — горячий газ.

Однако это лишь принцип действия. Чтобы понять, при каких условиях будет работать такой генератор, вычислим его параметры — ЭДС и внутреннее сопротивление. Пусть сопротивление нагрузки бесконечно, иначе говоря — нагрузка разомкнута. Каково будет напряжение $\mathcal{E}$ на выходе генератора, то есть ЭДС? Оно равно работе по перемещению единичного заряда между электродами. Поскольку эта работа производится против силы $F=evB$, при ширине канала, равной d, $\mathscr{E}=Fd/e=vBd$. Для $d=3$ м, $v=1500$ м/с и $B=5$ Тл $\mathscr{E}$ составит 22,5 кВ — вполне значительную величину, достаточную для практических применений.

Вернемся на минуту во времена Фарадея и оценим ЭДС для пары электродов, опущенных в Темзу (конечно, река — это не струя проводящего газа, а струя проводящей жидкости, но принципиальной разницы нет). Темза — река широкая (это хорошо), но медленная (это плохо), а магнитное поле Земли маленькое (это тоже плохо). Полагая $d=30$ м, $v=0,1$ м/с, $B=10^{-4}$ Тл, получим $\mathscr{E}=3\cdot10^{-4}$ В. (Такую величину Фарадей измерить не смог...)

Теперь найдем внутреннее сопротивление МГД-генератора.

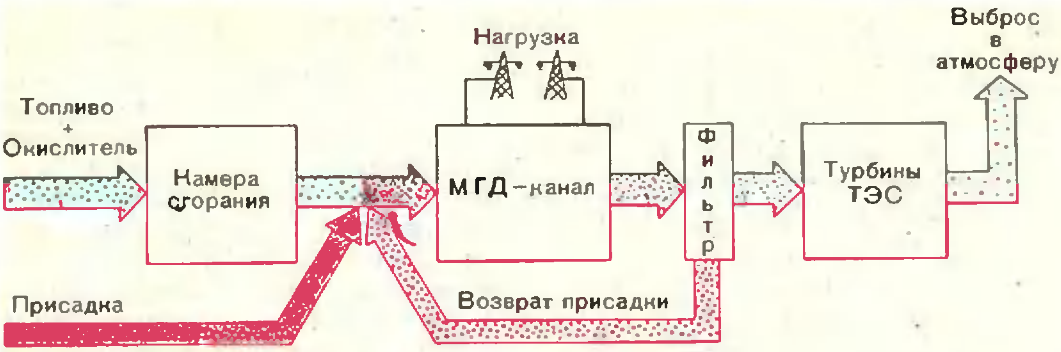
Как известно, сопротивление металлического проводника длины L и сечения S равно $R=\frac{mL}{e^2n\tau S}$, где m и e — масса и заряд электрона, n — концентрация свободных электронов в металле, τ — время свободного пробега электрона (см. «Физика 9», с. 175). Мы можем воспользоваться этой формулой и для случая газа с электронной проводимостью, подставляя в формулу «газовые» значения τ и n. При температуре $T=2000$ К и давлении газа в канале 10^5 Па (величины, обычные для МГД-генераторов) τ составляет $\sim10^{-12}$ с. Как видно из рисунка, в нашем случае $L=d$, $S=hl$, так что $R=3,5\cdot10^{19}\,\frac{d}{nhl}$. Итак, мы связали внутреннее сопротивление R МГД-генератора с размерами канала и концентрацией электронов в газе.

Какие же величины R надо обеспечить, чтобы применение МГД-генератора было экономически целесообразно? Пусть от генератора с размерами канала $d=h=3$ м, $l=15$ м мы хотим получить мощность $P=2000$ МВт. Если сопротивление нагрузки $R_н$, то ток в генераторе и нагрузке $I=\mathscr{E}/(R+R_н)$, мощность, развиваемая генератором, $P_г=\mathscr{E}I=\mathscr{E}^2/(R+R_н)$, мощность, выделяющаяся в нагрузке, $P=\mathscr{E}^2R_н/(R+R_н)^2$, мощность потерь $P_п=\mathscr{E}^2R/(R+R_н)^2$. Так как по условию $P=2000$ МВт, а $\mathscr{E}=22,5$ кВ, то $R_н=4(R+R_н)^2$. Основное, ради чего мы «изобретаем» МГД-генератор, — высокий КПД. Значит, $P_п$ должно составлять лишь небольшую часть $P_г$ — скажем, не более 10%. Иначе МГД-генератор окажется не эффективнее обычной ТЭС. Итак, пусть $P_п\leqslant0,1P_г$, то есть $\mathscr{E}^2R/(R+R_н)^2\leqslant0,1\mathscr{E}^2/(R+R_н)$; тогда $R\leqslant0,11\,R_н$. Отсюда и из $R_н=4(R+R_н)^2$ имеем $R\leqslant0,022$ Ом. Для того чтобы при заданных величинах $d=h=3$ м, $l=15$ м получить такое R, надо иметь концентрацию электронов $n\geqslant10^{20}$ электронов/м^3. Но откуда взяться в газе такому количеству электронов? При температуре 2000 К газ практически целиком состоит из неионизированных молекул; его можно ионизировать, нагрев, например, до 8000 К. Но ведь при такой температуре плавятся все известные материалы — МГД-канал и камеру сгорания просто не из чего будет делать...

Однако концентрацию электронов можно увеличить добавлением к газу легкоионизирующихся добавок. Такими добавками, или, как их называют, присадками, могут быть щелочные металлы, причем наиболее эффективно добавление калия и цезия. Например, добавка к смеси CO_2+H_2O (продукты сгорания угля или природного газа) 1% калия создает при температуре газа 2500 К концентрацию электронов, в 10^{24} раз бо́льшую, чем в его отсутствие.

Присадка калия вводится в самое начало МГД-канала, сразу за камерой сгорания, в виде солей K_2CO_3 или K_2SO_4 — дешевых и легкодоступных соединений калия. Частицы должны быть мелкими, размером порядка микрона,— они должны успеть расплавиться, испариться, разложиться и ионизироваться в самом начале канала, чтобы к электродам пришел газ уже с достаточной проводимостью.

Еще больше увеличивает проводимость газа добавка цезия. Но цезий весьма дорог, и применять его можно только в том случае, если при работе МГД-генератора не будет необходимости в постоянном расходе



МГД-генератор с открытым циклом.

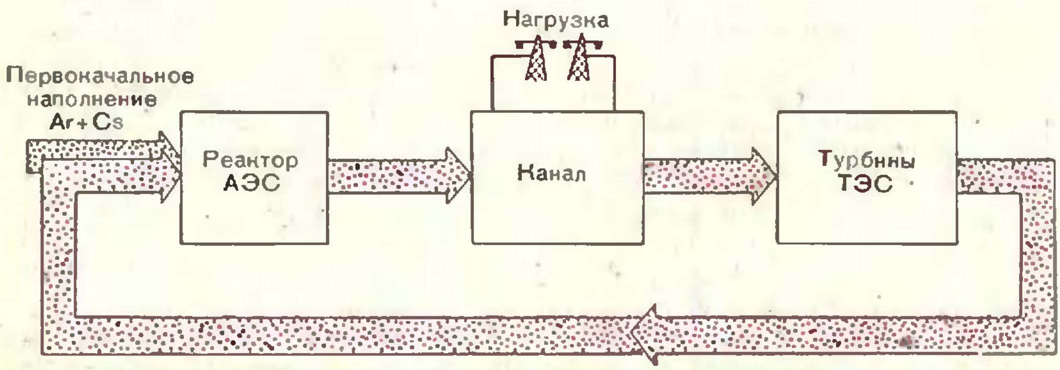
присадки. Чтобы узнать, как расходуется присадка при работе МГД-генератора, нам придется заняться вопросом о судьбе газа, прошедшего через МГД-канал.

Этот газ имеет еще вполне достаточную энергию, чтобы вращать турбины ТЭС. В этом случае МГД-генератор будет играть роль «самой высокотемпературной ступени» в ТЭС. Это еще более повысит его КПД. После МГД-канала и турбин газ выбрасывается в атмосферу. И хотя фильтры задерживают на выходе из канала почти 95% присадки, из труб МГД-электростанции мощностью 2000 МВт все равно будет выбрасываться в атмосферу 4 тонны присадки в час. Поэтому в МГД-генераторе, который после канала выбрасывает газы в атмосферу, цезий применять нельзя — слишком дорого обойдется. Для таких МГД-генераторов, называемых *МГД-генераторами с открытым циклом*, в качестве присадки возможно применение только калия в виде K_2CO_3 или K_2SO_4.

Раз существует МГД-генератор с открытым циклом, то, наверное, существует и МГД-генератор с замкнутым циклом? Да. В нем рабочим телом обычно является инертный газ (как правило, аргон), присадкой — цезий.

Газ после канала и турбин (если они есть) возвращается... куда? Не в камеру сгорания — гореть в МГД-генераторе с замкнутым циклом нечему, природное горючее в нем не сжигается. Газ возвращается в зону нагрева, которой может быть, например, «внутренность» атомного реактора. Потерь газа и присадки в этом случае нет, и можно использовать цезий, который создаст бо́льшую проводимость, чем калий.

Применение МГД-генератора с замкнутым циклом может повысить КПД атомной электростанции, но для широкого применения МГД-генераторов как с открытым, так и с замкнутым циклом надо решить группу проблем, из которых наиболее сложная, так сказать, «узловая».



МГД-генератор с закрытым циклом.

Проблема канала.

Необходимы изоляционные и проводящие материалы, не слишком быстро разрушающиеся в условиях работы МГД-генератора. А условия эти непростые.

СРЕДА в МГД-генераторе с открытым циклом — химически активные продукты сгорания топлива с еще более химически активными примесями (сера) и присадкой (калий).

В МГД-генераторе с замкнутым циклом — хотя и химически неактивные инертные газы, но зато очень химически активная присадка (цезий).

ТЕМПЕРАТУРА $2000 \div 3000$ К.

И вдобавок этот химически активный и довольно горячий ветер имеет

СКОРОСТЬ $1000 \div 2000$ м/с.

Такие условия выдерживают только самые тугоплавкие соединения (Al_2O_3, MgO). Их используют в качестве изоляторов стенок МГД-канала. А металлы таких условий не выдерживают вовсе. Поэтому электроды делают не из металлов, а из проводящих химических соединений и их смесей (ZrO_2+CeO_2, $ZrO_2+La_2O_3$, $LaCrO_3$ и др.). Однако стойкость этих материалов также оставляет желать лучшего. Многочисленные попытки защитить электроды от действия потока горячих газов пока не увенчались полным успехом. Если «проблему канала» и ряд других, тоже достаточно сложных проблем (мощный электромагнит, высокотемпературный атомный реактор) удастся решить, то перед МГД-генератором откроются следующие

Перспективы применения.

1. МГД-ГЕНЕРАТОР С ОТКРЫТЫМ ЦИКЛОМ НА ПРИРОДНОМ ГОРЮЧЕМ КАК МЕТОД ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ С МАКСИМАЛЬНЫМ КПД.

Такой генератор будет работать на угле, нефти или газе, имея КПД 50—60% (при двухступенчатой схеме: МГД-генератор + турбины ТЭС на его выходе). Для генерирования, например, мощности 2000 МВт генератор (МГД+ТЭС) должен иметь канал с сечением 9 м^2 ($d=h=3$ м) и длиной 15 м. Скорость газов в канале будет 1500 м/с, магнитное поле 5 Тл. Ежесекундно в камере сгорания две тонны горючего будут превращаться в смесь газов CO_2+ $+H_2O$, нагретую до 2500 К, а в начало канала ежесекундно будет вводиться 20 кг присадки K_2CO_3. Сопротивление газа в канале будет 0,02 Ом. Важным параметром МГД-генератора как высокотемпературной ступени ТЭС будет время непрерывной работы — нельзя же слишком часто останавливать МГД-электростанцию для ремонта канала. (Обеспечение большого времени непрерывной работы — еще одна важная проблема в создании мощных МГД-генераторов.) На действующем МГД-генераторе У25 (максимальная мощность 20 МВт) достигнуто время непрерывной работы около 10 дней при рабочей мощности 3 МВт. Но для того чтобы применение МГД-генераторов было экономически целесообразно, мощность должна быть увеличена в 10—100 раз.

2. МГД-ГЕНЕРАТОР С ОТКРЫТЫМ ЦИКЛОМ НА ПРИРОДНОМ ГОРЮЧЕМ ДЛЯ ПОКРЫТИЯ «ПИКОВЫХ НАГРУЗОК» В ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СЕТИ.

Такие электростанции называют «пиковыми» или «полупиковыми», в отличие от «базовых». Потребление энергии в течение суток меняется — например, в городах «пик нагрузки» приходится на вечер. Изменение режима работы обычной ТЭС довольно сложно, и вечером энергии не хватает. Ситуация может быть облегчена при наличии МГД-генератора соответствующей мощности, так как его включение или изменение режима работы занимает несколько минут. Такой генератор включался бы только в период «пика нагрузки» и увеличивал бы в необходимой степени мощность электростанции.

3. МГД-ГЕНЕРАТОР КАК МОЩНЫЙ МЕСТНЫЙ ИСТОЧНИК ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ ДЛЯ КРАТКОВРЕМЕННОГО ПОТРЕБЛЕНИЯ.

Для питания экспериментальных физических установок часто требуются весьма большие мощности, иногда более 10^4 МВт. При этом источник питания должен работать недолго и с большими перерывами — скажем, по 5 минут раз в полчаса. 10^4 МВт — это крупнейшая ТЭС, строить ее долго и дорого; запуск котлов и турбин занимает более часа, так что работать ей придется непрерывно, а не по 5 минут. Тянуть линию электропередачи на 10^4 МВт тоже долго и дорого. А МГД-генератор на 10^4 МВт — это установка, которую можно будет перевезти тягачами. Стоить она будет много дешевле ТЭС, запуск ее будет занимать менее минуты.

А импульсные МГД-генераторы на меньшие мощности совсем скромны по размерам. Например, самый мощный на сегодняшний день импульсный МГД-генератор «Урал», предназначенный для генерации мощности 50 МВт в течение двух секунд, имеет длину канала всего 1,2 м. Вывод его на режим занимает одну секунду; всего за три секунды работы он «съедает» 300 кг твердого топлива — пороха.

В заключение предлагаем вам несколько вопросов. Эти вопросы — не задачи в привычном смысле; это, скорее,

Информация к размышлению

1. Почему при вычислении проводимости мы учитывали движение только электронов и не учитывали движение ионов?

2. Как еще можно использовать тепло газов, выходящих из МГД-канала? Имеет ли смысл подогревать топливо и воздух, подаваемые в камеру сгорания?

3. Имеет ли смысл для увеличения стойкости электродов охлаждать их? Как при этом изменится внутреннее сопротивление МГД-генератора?

4. Магниты первых МГД-генераторов были выполнены на железном сердечнике с медной обмоткой. Такие магниты потребляли примерно такую же мощность, какую давал соответствующий МГД-генератор. МГД-генераторы работали практически только «на себя». Как можно сильно уменьшить потребление энергии электромагнитом?

5. МГД-генератор может работать по следующей «двухконтурной» схеме: топливо сгорает, продукты сгорания нагревают аргон, находящийся в замкнутом контуре и являющийся рабочим телом. Каковы преимущества и недостатки такого МГД-генератора?

Задачи, предлагавшиеся на математическом бое на XIV Всесоюзной олимпиаде школьников

(см. с. 48)

1. Докажите, что при любом простом p произведение $(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\times\ldots\times(p^2+1)$ при делении на p дает в остатке либо 0, либо 4.

2. Найдите хотя бы одно целочисленное решение $(x; y)$ уравнения

$$x^2+xy-y^2=1,$$

для которого $x>100$ и $y>100$.

3. Выясните, при каких значениях x предел последовательности

$$x_n=x^n \sin \pi x^n$$

существует и равен 0.

4. Выясните, при каких значениях a существует предел последовательности (x_n), заданной рекуррентным соотношением

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3}{3x_n^2-1}$$

и своим первым членом $x_1=a$.

5. На плоскости даны n отрезков и $n+2$ точки «общего положения», то есть отрезки не параллельны, не пересекаются по три в одной точке, а точки не лежат на данных отрезках или их продолжениях. Докажите, что какие-то две из данных точек можно соединить отрезком, не пересекающим ни один из данных отрезков.

6. Отрезок AB пересекает сферу в двух точках. Докажите, что множество точек M таких, что обе прямые MA и MB касаются данной сферы, является плоским (целиком содержится в некоторой плоскости).

7. Внутри сферы радиуса R заключен выпуклый многогранник, ребра которого имеют длины $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а двугранные углы при этих ребрах — величины $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ соответственно (в радианах). Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\pi-\varphi_k)<8\pi R.$$

(Заметим, что задачи 6 и 7 не удалось решить ни одной из команд.)

И. Блехер

О людях правдивых, лгунах и обманщиках

Среди математических задач на сообразительность особый интерес представляют логические задачи. Такие задачи, как правило, не требуют специальных математических знаний, и их условие может быть объяснено даже людям, весьма далеким от математики.

В настоящей статье мы разберем четыре логические задачи. В этих задачах у нас будут присутствовать люди правдивые, говорящие во всех случаях только правду, и лгуны, всегда говорящие только неправду. Однако наибольшую трудность и наибольший интерес, как мы увидим, будут представлять те задачи, в которых встречаются еще и обманщики, то есть люди, говорящие что угодно, только бы запутать спрашивающего.

Задача 1*). *На развилке двух дорог, одна из которых ведет в город А, где живут правдивые люди, а другая ведет в город В, где живут лгуны, математик встретил жителя одного из этих городов. Может ли математик за один вопрос выяснить у встреченного им жителя, какая из дорог ведет в город А?*

Ответ в задаче 1 является положительным даже при дополнительном условии, которого мы всегда будем придерживаться в статье: вопрос должен задаваться в такой форме, чтобы ответом на него служили слова «да» и «нет». Вопрос, решающий задачу 1, таков: «*Ведет ли эта дорога* (указывая на одну из дорог) *в ваш родной город?*». Легко проверить, что ответ «да» означает, что данная дорога ведет в A, ответ «нет» — что в B. В самом деле, если отвечающий является жителем города A, то он всегда говорит правду и поэтому его ответ «да» означает, что указанная дорога ведет в A, а ответ «нет» — что в B. Если же отвечающий живет в B, то его ответ «да», поскольку этот человек всегда говорит неправду, означает, что указанная дорога ведет не в B, то есть в A, а ответ «нет» означает, что эта дорога ведет в его родной город, то есть в B. Таким образом, в обоих случаях ответ «да» означает, что данная дорога ведет в A, и ответ «нет» — что в B, что и утверждалось.

Заметим, что мы не определяем при ответе, с кем мы разговариваем — с жителем города A или с жителем города B, но это и не требовалось. Автору известны и другие решения задачи 1, но все они основаны на одной и той же идее: вопрос о том, ведет ли данная дорога в город A, нужно задать в такой форме, чтобы лгуну приходилось давать «дважды отрицательный» ответ. Поскольку двойное отрицание эквивалентно положительному ответу, лгун в этом случае дает тот же ответ, что и человек, говорящий правду. Это и происходит в приведенном нами решении.

Вторая задача, которую мы разберем, является усложнением первой. Это усложнение связано с появлением среди отвечающих обманщика.

Задача 2. *Пусть в условиях задачи 1 математик встретил на развилке не одного, а трех человек, один из которых является жителем города А, второй — жителем города В, а третий — обманщиком. При этом математик знает, что среди этих троих один — житель города А, другой — житель города В, а третий — обманщик, но конкретно не знает, кто из них есть кто. Может ли математик за два вопроса выяснить дорогу в А?*

*) Задачи 1 и 2 были сообщены автору венгерским математиком П. Майором

Уточним, что каждый из двух вопросов может быть задан любому из трех лиц, встреченных математиком на развилке, и на вопрос отвечает только тот, кому этот вопрос задан. Кроме того, каждый из встреченных знает «кто есть кто» среди них и какая дорога ведет в A и какая — в B.

Решение задачи 1 наталкивает на мысль: а нельзя ли первым вопросом выделить из трех человек того, который не является обманщиком? Тогда задача 2 будет сведена к задаче 1 и, задав выделенному человеку тот же вопрос, что и в задаче 1, мы узнаем дорогу в A. Оказывается, такой первый вопрос задать можно, хотя догадаться до него, как кажется автору, непросто.

Перенумеруем для удобства всех трех человек произвольным образом. Вопрос задается первому. Вот он: *«Предположим, что каждый из вас троих сейчас отправится в A или в B по следующему принципу: житель города A пойдет в город A, житель города B — в город B, а обманщик — если только обманщиком не являетесь вы сами — пойдет вместе с вами; если же вы — обманщик, то вы пойдете куда угодно. Пойдет ли при этих условиях в A вот этот* (указывая на второго) *человек?»*.

Мы утверждаем, что при ответе «да» третий человек — не обманщик, а при ответе «нет» второй человек — не обманщик. Действительно, если вопрос мы задали обманщику, то и второй и третий из опрашиваемых не являются обманщиками. Далее, если вопрос мы задали человеку, который всегда говорит правду, то его «да» означает, что второй является обманщиком и, стало быть, третий им не является. Наоборот, его ответ «нет» свидетельствует о том, что второй человек является лгуном (ведь только лгун не идет вместе с ним). Если же вопрос мы задали лгуну, то его «да» означает, поскольку обманщик идет в B, а человек, говорящий правду,— в A, что второй человек — обманщик, а третий — человек, говорящий правду. «Нет» же означает, что, наоборот, второй — это человек говорящий правду, а третий — обманщик.

Проанализировав все возможности, нетрудно увидеть, что при ответе «да» третий человек, а при ответе «нет» второй человек заведомо не являются обманщиками. Таким образом, в обоих случаях мы можем указать человека, не являющегося обманщиком, и тем самым задача 2 решена.

Заметим, что, как и при решении задачи 1, основная идея состояла в том, чтобы заставить лгуна сделать двойное отрицание, то есть добиться того, чтобы его ответы имели тот же смысл, что и у человека, говорящего правду, и чтобы они при этом различали обманщика и необманщиков.

Задача 3. *На химический конгресс приехали N ученых; некоторые из них являются химиками, остальные — алхимиками, причем известно, что химиков больше. Химик на все вопросы отвечает правдиво, а алхимик всегда лжет. На конгресс попал математик, задавшийся целью установить о всех ученых, кто из них есть химик, а кто — алхимик. Для этого ему разрешается спрашивать любого ученого о любом другом ученом, кто он. Укажите способ, при котором математик может выяснить «кто есть кто» за $(N-1)$ вопросов.*

Решение задачи 3 сравнительно несложно. А именно, спросим у любого ученого (назовем его для определенности *первым*) о каждом из остальных. В результате эти $(N-1)$ ученых будут разбиты на две группы: группа тех, кто по словам первого ученого является химиком, и группа тех, кто по словам первого ученого является алхимиком. Отнесем первого ученого к первой группе. Выберем из этих групп бо́льшую. Тогда ученые этой группы — химики, ученые другой группы — алхимики (докажите!). Тем самым задача решена.

Теперь мы подошли к центральной задаче нашей статьи — задаче М585 («Квант», 1979, № 9). Ее условие совпадает с условием задачи 3, за тем исключением, что алхимики являются уже не лгунами, а обманщиками. В задаче М585 предлагалось *выяснить «кто есть кто» на конференции за* а) $4N$, б) $2N-2$, в) $[3N/2]$ *вопросов.*

Эта задача является несравненно более сложной, чем задача 3, и опять это связано с тем, что ответы лгуна хотя и являются неправильными, но они, так сказать, «постоянно неправильны», что позволяет извлекать из них почти столько же информации, что и из правильных ответов правдивого человека. Ответы же обманщика произвольны, и извлечь из них какую-либо информацию — задача гораздо более сложная.

Приводимое ниже решение дает возможность выяснить, кто — химик, а кто — алхимик, даже за меньшее, чем $[3N/2]$, число вопросов, а именно — за $q=3k$ вопросов, если $N=2k+1$ — число нечетное, и за $q=3(k-1)$ вопросов, если $N=2k$ — число четное.

Вначале мы рассмотрим нечетные N. Искомый способ мы определим индукцией по k. Если на конференции присутствовал $N=1$ ученый $(k=0)$, то он, очевидно, химик, поскольку химиков должно быть больше; никаких вопросов в этом случае задавать не надо: $q=0=3\cdot 0$.

Предположим теперь, что для всех нечетных чисел, меньших данного числа $N=2k+1$, мы уже имеем способ, позволяющий решить задачу в требуемое число вопросов. Укажем такой способ для числа $N=2k+1$. Перенумеруем для удобства всех участников конференции произвольным образом и начнем спрашивать второго, третьего и т. д. ученых, кто есть первый ученый. Этот опрос мы прекратим, как только произойдет одно из двух событий:

С о б ы т и е А. *Среди опрошенных ученых большинство высказалось за то, что первый ученый — алхимик.*

С о б ы т и е В. *Число ученых, утверждающих, что первый ученый — химик, равно k.*

Ясно, что если произошло событие A и к этому моменту t ученых утверждали, что первый ученый — химик, и f — что он алхимик, то $f=t+1$. (Действительно, $f>t$, а если предположить, что $f\geqslant t+2$, то событие A должно произойти хотя бы на один вопрос раньше.) Ясно, кроме того, что при этом опросе было задано $q_1=f+t=2f-1$ вопросов. (Частным случаем события A является ситуация, когда уже второй ученый сказал, что первый является алхимиком — здесь $t=0$, $f=1$.)

Если же произошло событие B и при этом f ученых утверждали, что первый ученый — алхимик, то общее число заданных вопросов равно $q_1=k+f$.

Нетрудно видеть, что опрос прервется до того, как будут опрошены все ученые, присутствующие на конференции. В самом деле, предположим противное. Значит, перед опросом последнего ученого не произошло ни одно из событий A, B. Пусть в этот момент среди опрошенных ученых t человек высказались за то, что первый ученый — химик и f — за то, что он алхимик. Поскольку не произошло события A, $f\leqslant t$. Поскольку не произошло события B, $t\leqslant k-1$. Поэтому общее число опрошенных $f+t\leqslant 2(k-1)$. Добавив к ним первого и последнего ученых, мы получаем, что общее число участников конференции не превосходит $2k$, тогда как их $2k+1$. Полученное противоречие доказывает, что одно из событий — A или B — произойдет до того, как будет опрошен последний ученый.

Пусть произошло событие A. Тогда мы утверждаем, что в группе ученых, состоящей из первого ученого и всех опрошенных ученых, число алхимиков не меньше числа химиков.

Действительно, если первый ученый — химик, то те f ученых, которые утверждали, что он алхимик,— сами алхимики. Поскольку общее число ученых в рассматриваемой группе есть $1+t+f=2f$, число алхимиков в группе в этом случае не меньше числа химиков. Если же первый ученый — алхимик, то алхимиками являются и те t ученых, которые утверждали, что он химик. Поэтому и в этом случае число алхимиков не меньше $1+t=f$, то есть не меньше половины.

Далее, поскольку общее число химиков превосходит по условию задачи общее число алхимиков, в оставшейся группе из $N-2f=2(k-f)+1$ ученых число химиков также должно превосходить число алхимиков. Число $N-2f$, очевидно, меньше N, поэтому по предположению индукции существует способ, позволяющий за $q_2=3(k-f)$ вопросов выяснить, кто в оставшейся группе ученых есть химик и кто — алхимик. Выберем теперь из этой группы произвольного химика (такой, очевидно, найдется) и спросим его (на это уйдет $q_3=1$ вопрос), кто есть первый ученый.

Если он алхимик, то те t ученых, которые утверждали, что он химик,— алхимики. Поэтому нам остается лишь выяснить у выбранного нами химика, «кто есть кто» среди тех f ученых, которые утверждали, что первый ученый — алхимик (на это уйдет еще $q_4=f$ вопросов). В результате мы восстановим полную картину разбиения участников конференции на химиков и алхимиков и истратим на это $q=q_1+q_2+q_3+q_4=2f-1+3(k-f)+1+f=3k$ вопросов, что и требовалось.

Если же первый ученый оказался химиком, то те f ученых, которые утверждали, что он алхимик, сами являются алхимиками. Поэтому нам остается выяснить у выбранного нами химика лишь «кто есть кто» в группе из t ученых, утверждавших, что первый ученый — химик. На это мы затратим $q_4=t$ вопросов. Общее число вопросов $q=q_1+q_2+q_3+q_4=2f-1+3(k-f)+1+t=3k-1$ в этом случае даже меньше того числа вопросов которое мы вправе использовать. Тем самым случай, когда произошло событие A, полностью разобран.

Рассмотрим теперь тот случай, когда произошло событие B. Мы утверждаем, что в этом случае первый ученый — химик.

В самом деле, если бы он был алхимиком, то и те k ученых, которые утверждали, что он химик, тоже были алхимиками и общее число алхимиков было бы не меньше $k+1$, то есть больше половины, а это противоречит условию задачи.

Итак, первый ученый — химик, а те f ученых, которые утверждали, что он алхимик, сами — алхимики. Выясним теперь у первого ученого «кто есть кто» среди тех k ученых, которые утверждали, что он химик (на это уйдет $q_2=k$ вопросов), и «кто есть кто» среди остальных ученых, не участвовавших в опросе (на это уйдет еще $q_3=N-(1+k+f)=2k+1-1-k-f=k-f$ вопросов). Таким образом, мы полностью выясним «кто есть кто» на конференции и затратим на это $q=q_1+q_2+q_3=k+f+k+k-f=3k$ вопросов. Тем самым оба случая — и когда происходит событие A, и когда происходит событие B — рассмотрены, и поэтому для нечетного числа участников задача полностью решена.

Для четных N решение задачи почти дословно повторяет решение, данное нами для нечетных N, и мы оставляем его в качестве упражнения тем, кто хочет глубже понять проведенное рассуждение.

Задача для исследования

а) Для каких натуральных k верна следующая теорема: На сфере расположено шесть точек так, что лучи, соединяющие центр сферы с этими точками, образуют три взаимно перпендикулярные прямые. Тогда сумма k-х степеней расстояний от любой точки сферы до этих шести точек одна и та же.

б) А если вместо этих шести точек взять на сфере четыре вершины правильного тетраэдра?

в) Восемь вершин вписанного куба?

Выясните, вообще, для каких k и n можно расположить на сфере n точек так, чтобы сумма k-х степеней расстояний до этих точек от любой точки сферы была постоянной, и опишите все (или наиболее симметричные) такие расположения.

Ю. Бибенко

Дж. Уокер

Физический фейерверк

Задачи-вопросы, публикуемые ниже, взяты из книги Дж. Уокера «Физический фейерверк», выпущенной недавно издательством «Мир». Большинство задач связано с различными явлениями природы, встречающимися практически на каждом шагу. Чтобы ответить на все поставленные вопросы, нужно провести соответствующие опыты или наблюдения. Ответы, приведенные в конце журнала, как правило, лишь уточняют задачу или подсказывают путь к ее решению.

1. Волшебный пропеллер

Пропеллер на палочке с зарубками — замечательная игрушка, которую вы без труда можете сделать сами. По всей длине одной палочки делаются небольшие поперечные вырезы; на конце ее гвоздиком закрепляется свободно вращающийся пропеллер (рис. 1, *а*). Второй палочкой проводят по вырезам.

Взяв палочку с зарубками левой рукой так, чтобы большой палец был обращен к вам, а указательный находился с противоположной стороны палочки, начинайте водить другой палочкой взад-вперед по зарубкам. Теперь прижмите к палочке с зарубками указательный палец. Пропеллер начнет крутиться. Ослабьте нажим указательного пальца и прижмите к палочке большой палец, продолжая при этом водить другой палочкой по зарубкам. Пропеллер закрутится в другую сторону.

Показывая этот фокус непосвященным, незаметно нажимайте на палочку по очереди то большим, то указательным пальцами: зрители будут поражены неожиданными переменами направления вращения пропеллера. Вы же можете давать этому явлению самые фантастические объяснения. Например, говорите, что изменение направления вращения пропеллера связано с флуктуациями интенсивности космического излучения.

Первый вопрос, на который предстоит ответить: почему пропеллер вообще крутится? Следующий вопрос потруднее: почему направление его вращения зависит от того, с какой стороны вы нажимаете на палочку?

Если вам хочется сделать этот фокус позанятнее, укрепите на палочке четыре пропеллера (рис. 1, *б*). Правда, разница тут невелика, потому что все они будут вращаться в одну сторону. И еще одна конструкция: два пропеллера укрепляются друг за другом (рис. 1, *в*). Здесь возможны прямо-таки чудеса: оба пропеллера можно заставить крутиться вправо или влево или, что гораздо интереснее, можно сделать так, чтобы один пропеллер крутился в одну сторону, а другой — в другую.

2. Смотанный шланг

Если вы попробуете налить воду в шланг, как показано на рисунке 2, то из другого его конца не выльется ни капли. Да и влить вам удастся очень мало. Почему?

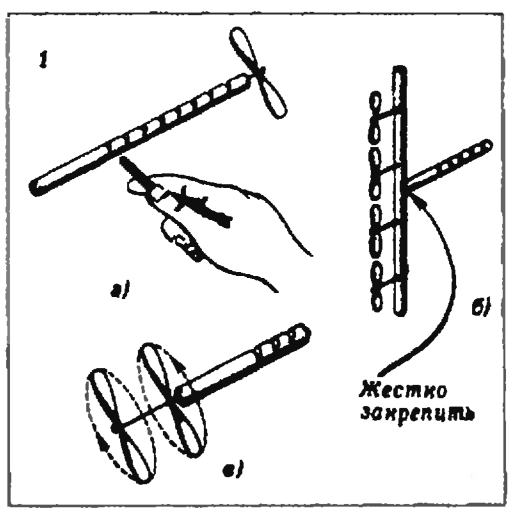


Рис. 1.

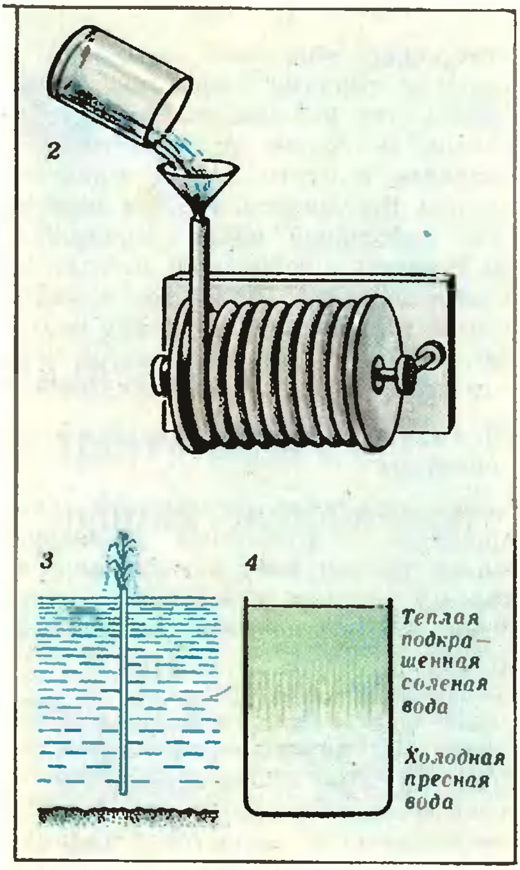


Рис. 2, 3, 4.

3. Перевернутый стакан с водой

Накройте стакан с водой (не обязательно полный) куском картона. Затем, придерживая картонку рукой, осторожно переверните стакан. Теперь уберите руку. Картонка остается на месте, и вода из стакана не выливается. Почему?

Попробуйте сделать такой же опыт с длинной стеклянной трубкой (длиной около 60 см и диаметром 3—4 см), запаянной с одного конца. Вы обнаружите, что, если трубка почти пустая или почти полная, картонка удерживается на месте и вода из трубки не выливается. Если же трубка наполнена примерно наполовину, вода из нее выливается. Почему?

4. Удержится ли вода в перевернутом стакане?

Представьте себе, что картонка, о которой шла речь в предыдущей задаче, внезапно исчезла из-под перевернутого стакана. Вода из стакана начинает вытекать. Почему?

Разумеется, на нее действует сила тяжести. Но разве поверхность воды в начальный момент не находится в равновесии и разве в этом случае не те же самые силы, как и в задаче 3, противодействуют силе тяжести?

5. Вечный соленый фонтан

Как известно, у поверхности тропических морей вода теплая и соленая, а с глубиной она становится холоднее и содержание соли в ней уменьшается.

Нельзя ли соорудить нечто вроде вечно действующего фонтана (рис. 3) — опустить трубу до дна моря, насосом накачать в нее холодную и более пресную воду, а затем предоставить систему самой себе?

Что заставляет фонтан работать и действительно ли он вечен?

6. Соляные «пальцы»

Нечто подобное соленому фонтану вы можете наблюдать у себя дома. Наполните аквариум до половины холодной пресной водой, а сверху осторожно налейте теплый крепкий раствор соли, слегка подкрашенный чернилами (чернила нужны только для большей наглядности).

Тотчас вы увидите, как из слоя раствора в нижний слой пресной воды начнут протягиваться «пальцы» (рис. 4). Такие «пальцы» можно наблюдать и в отсутствие разности температур между слоями жидкости — достаточно поверх раствора соли налить подкрашенный раствор сахара.

Почему вырастают «пальцы» и почему они столь устойчивы?

7. Соляной «маятник»

Обыкновенную консервную банку наполните насыщенным раствором соли (для наглядности подкрасьте его), проделайте в донышке банки маленькое отверстие и частично погрузите банку в сосуд с пресной водой.

Смешаются ли эти две жидкости? Да, и притом весьма удивительным

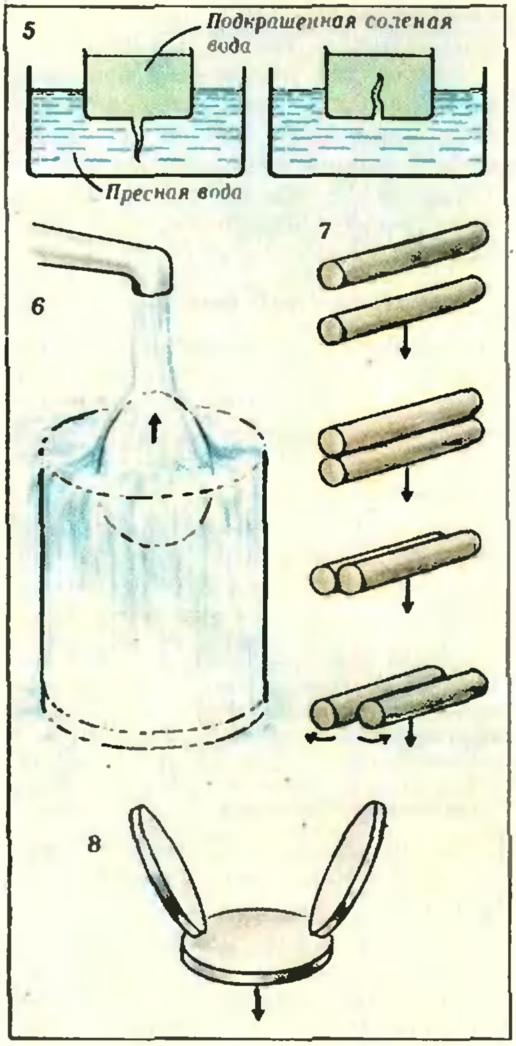


Рис. 5, 6, 7, 8.

образом: сначала из отверстия вытечет немного соленой воды, затем в него войдет немного пресной воды и т. д. (рис. 5). Такие колебания — их период составляет около 4 секунд — могут продолжаться до четырех дней.

Почему возникает такой колебательный процесс и чем определяется его период?

8. Яйцо «выскакивает» из стакана

Опустите яйцо в стакан с водой и поставьте стакан под кран (рис. 6). Если поток воды превышает некоторую критическую величину, то яйцо поднимается, как будто его притягивает струя воды. Почему это происходит?

9. Вихрь в чашке кофе

Осторожно покрутите ложечкой в чашке с горячим кофе так, чтобы кофе начал равномерно вращаться. Теперь аккуратно тонкой струйкой вливайте в центр чашки холодное молоко. Вы увидите, что там образуется небольшой вихрь. Возможно, вы заметите и небольшое углубление в его середине. Если же вливать в кофе горячее молоко, вихря не будет. Почему вихрь возникает в первом случае и не возникает во втором?

10. «Взаимодействие» тонущих предметов

Когда несколько предметов одновременно погружаются в вязкую жидкость, например в масло или сахарный раствор, между ними могут возникать весьма странные взаимодействия.

Приведем примеры.

1) Опустите в вязкую жидкость один за другим два цилиндра (рис. 7). При определенных значениях вязкости жидкости, размеров и скоростей цилиндров второй цилиндр может догнать первый и обойти вокруг него так, что они расположатся на одном уровне. Затем они начнут вращаться и, погружаясь, разойдутся в разные стороны.

2) Бросьте в жидкость один диск, а следом за ним еще два. Вы увидите, что последние догонят первый и все три образуют устойчивую конфигурацию «бабочки» (рис. 8).

3) Теперь бросьте в вязкую жидкость кучкой несколько шариков (три — шесть). Они разойдутся таким образом, что окажутся в вершинах горизонтально расположенного правильного многоугольника, который по мере погружения будет увеличиваться в размерах.

Как это можно объяснить?

В. Залгаллер

Задача о треугольниках с общим основанием

В пятом номере «Кванта» за 1978 год было предложено найти геометрическое решение следующей задачи: *два треугольника на плоскости имеют общее основание, а их вершины C_1, C_2 различны и лежат по одну сторону от основания; доказать, что расстояние между вершинами C_1 и C_2 больше, чем расстояние между центрами O_1 и O_2 вписанных окружностей этих треугольников.*

За прошедшие два года редакция получила много писем по поводу этой интересной и трудной задачи. Однако доказательства, учитывающего все возможности взаимного расположения вершин, не удалось найти ни одному из наших читателей.

Мы помещаем два доказательства: первое придумал харьковский математик А. И. Медяник, второе представляет собой доказательство, предложенное авторами задачи В. А. Залгаллером и А. А. Ивановым, упрощенное по совету академика А. В. Погорелова.

Первое доказательство

Нам понадобится следующее свойство биссектрисы угла треугольника («Геометрия 6—8», задача 914): *если AD — биссектриса угла A треугольника ABC ($D \in [BC]$), то* $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

Пусть точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности (рис. 1). Выразим вектор $\vec{\varrho} = \overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$ и через их длины a, b, c.

Легко видеть, что

$$\vec{\varrho} = \frac{|AO|}{|AD|} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{|AO|}{|AD|}\left(\vec{c} + \frac{|BD|}{|DC|}\vec{a}\right).$$

По свойству биссектрисы

$$\frac{|DC|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|DC| + |BD|} = \frac{c}{b+c}.$$

Аналогично (BO — биссектриса угла B),

$$\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{1}{1 + \frac{|OD|}{|AO|}} = \frac{1}{1 + \frac{|BD|}{c}}.$$

Из $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{c}{b}$ и $|BD| + |DC| = a$ получаем $|BD| = \frac{ac}{b+c}$.

Поэтому $\frac{|AO|}{|AD|} = \frac{b+c}{a+b+c}$.

Воспользовавшись тем, что $\vec{a} = -(\vec{b} + \vec{c})$, получим окончательно

$$\vec{\varrho} = \frac{b\vec{c} - c\vec{b}}{p}, \qquad (1)$$

где $p = a + b + c$.

Теперь приступим к решению задачи. Выразим длину вектора $\vec{d_0} = \overrightarrow{O_1O_2}$ через $d = |C_1C_2|$ и длины сторон треугольников ABC_1, ABC_2.

По доказанному (см. рис. 2)

$$\vec{d_0} = \vec{\varrho_2} - \vec{\varrho_1} = \frac{b_2\vec{c} - c\vec{b_2}}{p_2} + \frac{c\vec{b_1} - b_1\vec{c}}{p_1},$$

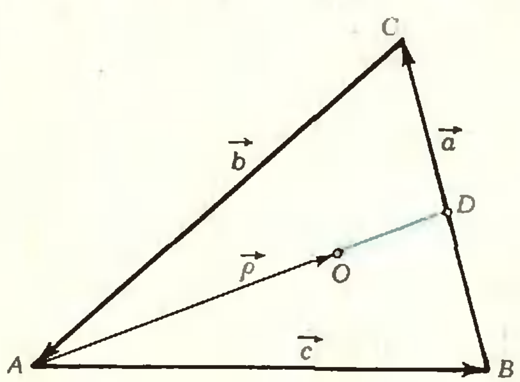
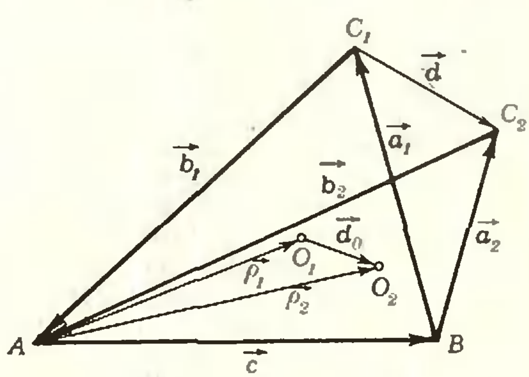


Рис. 1.



где $p_1=a_1+b_1+c$, $p_2=a_2+b_2+c$.

Вычисляя $\vec{d_0}\cdot\vec{d_0}=d_0^2$, после несложных преобразований получим

$$p_1^2p_2^2d_0^2=p_1^2cb_2[2cb_2-2(\vec{b_2}\vec{c})]+p_2^2cb_1[2cb_1-2(\vec{b_1}\vec{c})]+2p_1p_2[cb_2(\vec{b_1}\vec{c})-c^2(\vec{b_1}\vec{b_2})-b_1b_2c^2+cb_1(\vec{b_2}\vec{c})]. \qquad (2)$$

Заметим, что $2(\vec{b_1}\vec{c})=a_1^2-b_1^2-c^2$, $2(\vec{b_2}\vec{c})=a_2^2-b_2^2-c^2$; поэтому

$$2cb_1-2(\vec{b_1}\vec{c})=2cb_1-a_1^2+b_1^2+c^2=(a_1+b_1+c)(b_1-a_1+c)=p_1(b_1-a_1+c),$$

аналогично,

$$2cb_2-2(\vec{b_2}\vec{c})=p_2(b_2-a_2+c).$$

Это позволяет сократить равенство (2) на p_1p_2. Кроме того, $\vec{d}=\vec{b_2}-\vec{b_1}$, откуда $2(\vec{b_1}\vec{b_2})=b_1^2+b_2^2-d^2$. Поэтому (2) принимает вид

$$p_1p_2d_0^2=p_1cb_2(b_2-a_2+c)+p_2cb_1(b_1-a_1+c)+[cb_2(a_1^2-b_1^2-c^2)-c^2(b_1^2+b_2^2-d^2)-2b_1b_2c^2+cb_1(a_2^2-b_2^2-c^2)],$$

откуда

$$p_1p_2(d^2-d_0^2)=[(a_1+b_1+c)(a_2+b_2+c)-c^2]d^2+[(a_2-b_2-c)(a_1+b_1+c)b_2+(a_1-b_1-c)(a_2+b_2+c)b_1+(b_1^2-a_1^2+c^2)b_2+(b_1^2+b_2^2)c+2b_1b_2c+(b_2^2-a_2^2+c^2)b_1]c,$$

что после преобразований внутри квадратных скобок дает

$$p_1p_2(d^2-d_0^2)=[(a_1+b_1)(a_2+b_2)+c(a_1+b_1+a_2+b_2)]d^2+[c(a_2-a_1)(b_2-b_1)+(a_1b_2-b_1a_2)(a_2-a_1+b_1-b_2)]c. \qquad (3)$$

Чтобы доказать, что $d>d_0$, нам достаточно убедиться в положительности правой части равенства (3). Последняя состоит из двух слагаемых. Поскольку $a_1+b_1>c$ и $a_2+b_2>c$, первое слагаемое больше, чем $3c^2d^2$. Остается проверить, что второе слагаемое по модулю меньше, чем $3c^2d^2$. Очевидны соотношения $|a_2-a_1|<d$, $|b_2-b_1|<d$.

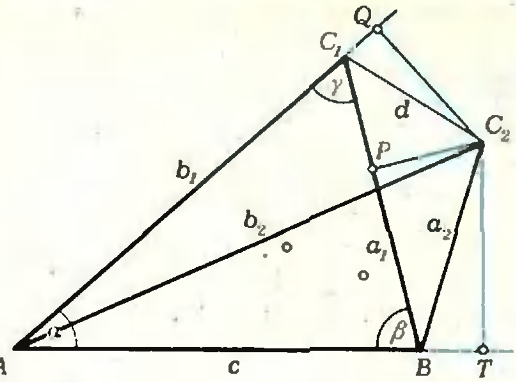


Рис. 3

Поэтому

$$p_1p_2(d^2-d_0^2)>(c^2+2c^2)d^2-|c^2(a_2-a_1)(b_2-b_1)|-|a_1b_2-b_1a_2|(|a_2-a_1|+|b_2-b_1|)c>3c^2d^2-c^2d^2-2dc|a_1b_2-b_1a_2|=2c^2d^2-2dc|a_1b_2-b_1a_2|. \qquad (4)$$

Ниже будет доказано, что $|a_1b_2-b_1a_2|\leqslant cd$.

Поэтому правая часть неравенства (4) неотрицательна.

Следовательно, $d>d_0$.

Итак, осталось доказать следующую лемму.

Л е м м а. *Пусть в плоскости треугольника ABC_1 произвольным образом расположена точка C_2. Тогда* (рис. 3)

$$|a_1b_2-b_1a_2|\leqslant cd.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опустим из точки C_2 перпендикуляры C_2P, C_2Q, C_2T на прямые BC_1, AC_1, AB.

Вокруг четырехугольника AQC_2T можно описать окружность с диаметром AC_2.

Так как $\widehat{QAT}=\alpha$, по теореме синусов, $|QT|=b_2\sin\alpha$.

Рассматривая аналогично четырехугольники C_1PC_2Q и PC_2TB, получим $|PQ|=d\sin\gamma$ и $|PT|=a_2\sin\beta$.

Пусть R — радиус окружности, описанной около треугольника AC_1B'. По теореме синусов, $\sin\gamma=\frac{c}{2R}$, $\sin\beta=\frac{b_1}{2R}$, $\sin\alpha=\frac{a_1}{2R}$. Поэтому $|QT|=\frac{a_1b_2}{2R}$, $|PT|=\frac{a_2b_1}{2R}$, $|PQ|=\frac{cd}{2R}$.

Из неравенства треугольника следует $||PT|-|QT||\leqslant|PQ|$; поэто-

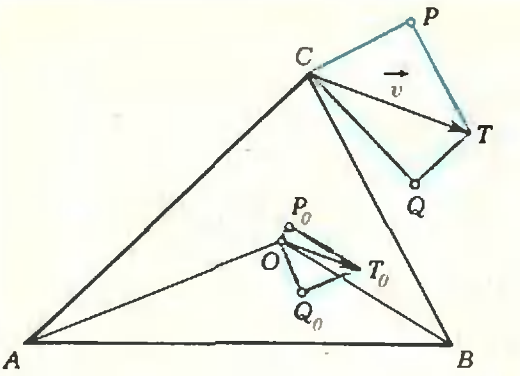


Рис. 4

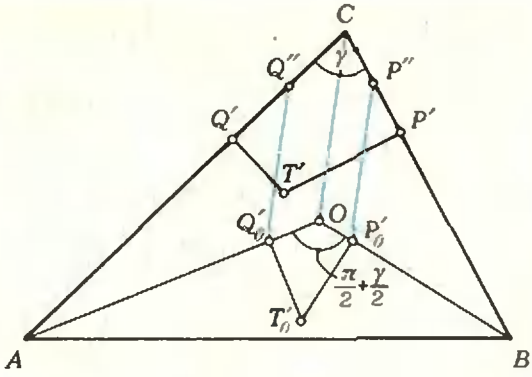


Рис. 5

му после подстановки выражений для $|QT|$, $|PT|$, $|PQ|$ и упрощений получим

$$|a_1b_2-a_2b_1|\leqslant cd.$$

Второе доказательство

Будем при закрепленном основании AB равномерно двигать вершину C вдоль отрезка C_1C_2 из C_1 в C_2. При этом центр O вписанного круга будет по какому-то пути перемещаться из O_1 в O_2.

Лемма. *При движении вершины C с ненулевой скоростью центр O двигается с меньшей скоростью.*

Из этой леммы следует, что, когда C пройдет с постоянной скоростью отрезок C_1C_2, точка O, двигаясь в каждый момент с меньшей скоростью, пройдет из O_1 в O_2 более короткий путь. Тем более прямой путь $|O_1O_2|$ короче, чем $|C_1C_2|$.

Прежде чем доказывать лемму, заметим следующее. Если вершина C движется со скоростью $\vec{v}\neq 0$, то лучи BC и AC, идущие вдоль сторон треугольника, поворачиваются с некоторыми угловыми скоростями ω_1 и ω_2, причем хотя бы одна из этих скоростей — не нуль. Условимся о знаках: считаем угловую скорость положительной, если луч поворачивается по часовой стрелке, и отрицательной, если луч поворачивается против часовой стрелки.

Скорости $\vec{v}$ и ω_1, ω_2 связаны между собой. Если от точки C отложить вектор $\vec{v}=\overrightarrow{CT}$ (рис. 4), то длина $|CP|$ его проекции на направление, перпендикулярное лучу BC, равна $|\omega_1|\cdot|BC|$. (Это вызвано тем, что полная скорость перемещения точки C слагается из скорости ее движения вместе с поворачивающимся лучом BC и из скорости ее движения вдоль этого луча.) Аналогично, длина $|CQ|$ проекции $\vec{v}$ на направление, перпендикулярное лучу AC, равна $|\omega_2|\cdot|AC|$. Вокруг четырехугольника $CPTQ$ можно описать окружность. При этом $|\vec{v}|$ равен диаметру этой окружности.

Аналогичное построение можно проделать для скорости $\vec{v_0}$ движения центра O, только в этом случае $[BC)$, $[AC)$ заменяются на $[BO)$, $[AO)$, а ω_1, ω_2 заменяются на $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$.

Хотя бы одна из скоростей ω_1, ω_2 — не нуль. Кроме того, одновременное изменение знаков у ω_1, ω_2 меняет на противоположное направление $\vec{v}$ и $\vec{v_0}$, не меняя величин $|\vec{v}|$, $|\vec{v_0}|$. Поэтому при доказательстве неравенства $|\vec{v}|>|\vec{v_0}|$ можно, не теряя общности, считать, что $\omega_1>0$, и рассмотреть отдельно три случая: $\omega_2>0$, $\omega_2=0$, $\omega_2<0$.

Случай 1. Пусть $\omega_2>0$. Повернем на 90° четырехугольник $CPTQ$ вокруг точки C в положение $CP'T'Q'$ (рис. 5), а четырехугольник $OP_0T_0Q_0$ — вокруг O в положение $OP'_0T'_0Q'_0$, и проведем $(P'_0P'')\parallel(Q'_0Q'')\parallel(OC)$. Точки P'' и Q'' разделят пополам отрезки CP', CQ', потому что $|CP'|/|CB|=\omega_1$, а $|OP'_0|/|OB|=\frac{\omega_1}{2}$.

Поскольку $|\vec{v}|$ — диаметр круга, описанного вокруг треугольника $CP'Q'$, а $|\vec{v_0}|$ — диаметр круга, опи-

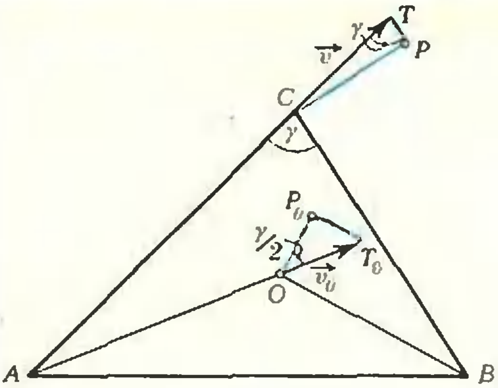


Рис. 6

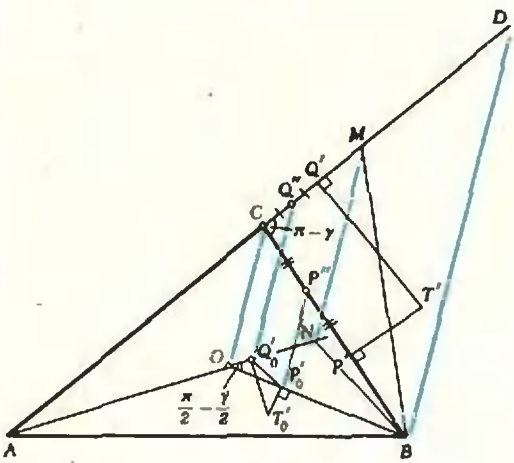


Рис. 7.

санного вокруг $OP_0'Q_0'$, имеем

$$|\vec{v}| = \frac{|P'Q'|}{\sin\gamma} = \frac{|P''Q''|}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$|\vec{v_0}| = \frac{|P_0'Q_0'|}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{|P_0'Q_0|}{\cos\frac{\gamma}{2}}. \qquad (5)$$

Отрезок $P_0'Q_0'$ наклонен к биссектрисе CO круче, чем один из лучей AO, BO, и тем более круче, чем AC и BC, которые наклонены к CO под углом $\frac{\gamma}{2}$. Поэтому расстояние между параллельными прямыми $P_0'P''$ и $Q_0'Q''$ превосходит $|P_0'Q_0'|\sin\frac{\gamma}{2}$. Тем более $|P''Q''|>|P_0'Q_0'|\sin\frac{\gamma}{2}$, что вместе с (5) дает $|\vec{v}|>|\vec{v_0}|$.

Случай 2. Пусть $\omega_2=0$ (рис. 6); тогда $|CP|=\omega_1|BC|$, $|OP_0|=\frac{\omega_1}{2}$, откуда $|\vec{v}|=\frac{\omega_1}{\sin\gamma}|BC|$, $|\vec{v_0}| = \frac{\omega_1}{2\sin\frac{\gamma}{2}}|BO|$. Но $|BC|>|BO|$ (так как $\angle BOC$ — тупой), а $\sin\gamma<2\sin\frac{\gamma}{2}$, откуда $|\vec{v}|>|\vec{v_0}|$.

Случай 3. Пусть $\omega_2<0$. Как и в случае 1, повернем на 90° четырехугольники $CPTQ$, $OP_0T_0Q_0$ в положение $CP'T'Q'$, $OP_0'T_0'Q_0'$ (рис. 7) и проведем $(P_0'P'')\parallel(Q_0'Q'')\parallel(BD)\parallel\parallel(OC)$. Точки P'', Q'' снова лежат в серединах отрезков CP', CQ'.

На этот раз снова

$$|\vec{v}| = \frac{|P'Q'|}{\sin(\pi-\gamma)} = \frac{|P''Q''|}{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}},$$

$$|\vec{v_0}| = \frac{|P_0'Q_0'|}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{|P_0'Q_0'|}{\cos\frac{\gamma}{2}},$$

и, чтобы убедиться, что $|\vec{v}|>|\vec{v_0}|$, нам достаточно проверить, что в этом случае

$$|P''Q''|>|P_0'Q_0'|. \qquad (6)$$

Подвергнем отрезок $P''Q''$ гомотетии с центром C так, чтобы он перешел в некоторый отрезок BM. Аналогично подвергнем отрезок $P_0'Q_0'$ гомотетии с центром O так, чтобы он перешел в некоторый отрезок BN. Существенно, что коэффициенты гомотетии при этом одинаковы. Поэтому для доказательства (6) достаточно убедиться, что $|BM|>|BN|$. Но последнее видно из того, что треугольник BNM имеет тупой угол при вершине N. Действительно, если N лежит слева от прямой BD, то $\widehat{MNB}>\widehat{COB}>\frac{\pi}{2}$, а если N лежит справа от BD, то $\widehat{MNB}>\widehat{MNO}=\widehat{COA}>\frac{\pi}{2}$. Лемма доказана.

Замечание. Из леммы нетрудно вывести, что неравенство $|O_1O_2|<<|C_1C_2|$ сохранится, во-первых, если C_1, C_2 будут лежать по разные стороны от прямой AB, во-вторых, если треугольники ABC_1, ABC_2 с общим основанием AB расположены в пространстве в разных плоскостях.

Вопрос. Зафиксируем основание треугольной пирамиды и будем двигать ее вершину. Будет ли центр вписанного шара двигаться с меньшей скоростью, чем вершина?

Задачник «Кванта»

Задачи

M651 — M655; Ф663 — Ф667

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М651, М652» или «Ф663». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

М651. Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка, вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них — больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

А. Тоом

М652. Женя разрезал выпуклый картонный многогранник на грани (по ребрам) и послал этот набор граней по почте Вите. Витя склеил из всех этих граней выпуклый многогранник. Может ли случиться так, что многогранники Жени и Вити не конгруэнтны?

Н. Васильев

М653. Имеется линейка с двумя делениями (рис. 1). С помощью линейки можно проводить произвольные прямые и откладывать отрезки определенной длины. Постройте с ее помощью
а) какой-нибудь прямой угол;
б)* прямую, перпендикулярную данной прямой.

В. Гутенмахер

М654. Верно ли такое утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать три числа, каждые два из которых не имеют общих делителей, бо́льших 1, или три числа, имеющие общий делитель, больший 1?

Ж. Раббот

М655. На столе у чиновника Министерства околичностей*) лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берет из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает

*) Ч. Диккенс. Крошка Доррит.

Рис. 1.

стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке (рис. 2). Кроме сказанного выше, чиновник никогда ничего не делает.

а) Какая запись будет сделана в ведомости через месяц, если общее количество томов $n=3$, $n=6$, $n=10$ (начальное расположение произвольно)?

б) Докажите, что если общее число томов $n=k(k+1)/2$, где k — натуральное, то, начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями.

в)* Исследуйте, что будет через много дней работы при других значениях n.

С. Лиманов, А. Тоом

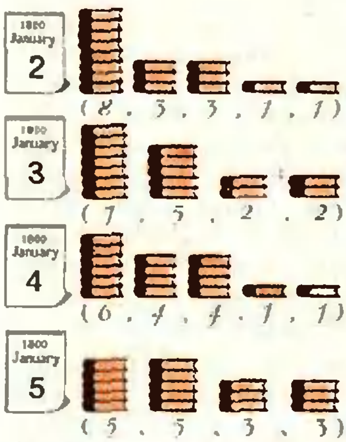


Рис. 2.

Ф663. Тяжелая тележка движется со скоростью v по горизонтальной плоскости и въезжает на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Переход между плоскостями плавный. На тележке на нити длиной l висит шарик. Какова будет амплитуда колебаний шарика, когда тележка въедет на наклонную плоскость?

Ф664. При фотографировании удаленного точечного источника на фотографии из-за невысокого качества объектива и применяемого фотоматериала получается светлый кружок диаметром $d=0{,}1$ м. С какого максимального расстояния можно сфотографировать в тех же условиях два точечных источника, расположенные на расстоянии $l=1$ см друг от друга, так, чтобы на фотографии их изображения не перекрывались? Фокусное расстояние объектива $F=5$ см.

Ф665. В теплоизолированном сосуде имеются две жидкости с удельными теплоемкостями c_1 и c_2, разделенные нетеплопроводящей перегородкой. Температуры жидкостей различны. Перегородку убирают, и после установления теплового равновесия разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся в сосуде температурой оказывается в два раза меньше разности начальных температур жидкостей. Найти отношение масс m_1 и m_2 первой и второй жидкостей.

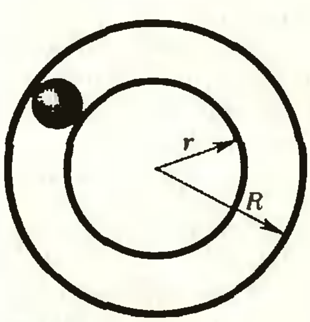


Рис. 3.

Ф666. Радиус внутренней обоймы шарикоподшипника равен r, а внешней — R (см. рисунок). Сколько оборотов сделает шарик между этими обоймами, если внешняя обойма сделает n_1, а внутренняя — n_2 оборотов вокруг оси?

Ф667. Электрон находится внутри соленоида на расстоянии r от его оси. За малое время Δt индукция поля внутри соленоида увеличилась от B до $2B$. Как при этом изменилась скорость электрона? Насколько мала должна быть величина Δt, чтобы решение было верным?

Решения задач

М605—М608; Ф608—Ф612

М605. *На плоскости отмечены $2n+1$ различных точек. Занумеруем их числами $1, 2, \ldots, 2n+1$ и рассмотрим следующее преобразование R плоскости: сначала делается симметрия относительно первой точки, затем — относительно второй и т. д. — до $(2n+1)$-й точки.*

а) Покажите, что у этого преобразования R есть единственная «неподвижная точка» (точка, которая отображается в себя).

Рассмотрим всевозможные способы нумерации наших $2n+1$ точек (числами $1, 2, \ldots, 2n+1$). Каждой такой нумерации соответствует свое преобразование плоскости R и своя неподвижная точка. Пусть F — множество неподвижных точек всех этих преобразований.

б) Укажите множество F для $n=1$.

в) Какое максимальное и какое минимальное количество точек может содержать множество F при каждом $n=2, 3, \ldots$?

Фиксируем произвольную систему координат.
Пусть точки $A(x; y)$ и $A^*(x^*; y^*)$ симметричны относительно точки $A'(x'; y')$. Тогда $x'=(x+x^*)/2$, $y'=(y+y^*)/2$, откуда

$$x^*=2x'-x,\ y^*=2y'-y.$$

Таким образом, точка с координатами $(x; y)$ при симметрии относительно точки с координатами $(x'; y')$ переходит в точку с координатами $(2x'-x; 2y'-y)$.

Поэтому при нашем преобразовании R точка с координатами $(x; y)$ перейдет в точку с координатами $(-x+2x_1-2x_2+\ldots+2x_{2n+1};\ y+2y_1-2y_2+\ldots+2y_{2n+1})$, где $(x_i; y_i)$ — координаты i-й из заданных $2n+1$ точек.

а) Для неподвижной точки $(x; y)$ преобразования R эти координаты определяются однозначно из условия

$$\begin{cases} -x+2x_1-2x_2+\ldots+2x_{2n+1}=x, \\ -y+2y_1-2y_2+\ldots+2y_{2n+1}=y \end{cases}$$

и равны $(x_1-x_2+\ldots-x_{2n}+x_{2n+1};\ y_1-y_2+\ldots-y_{2n}+y_{2n+1})$ или

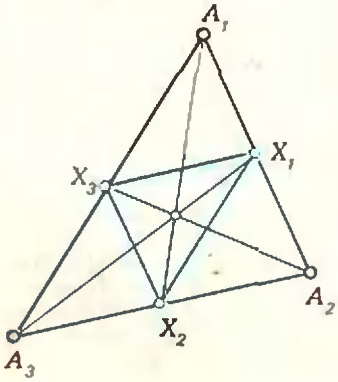
$$\left(\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i-1}x_i;\ \sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{i-1}y_i\right). \qquad (*)$$

Утверждение а) доказано.

б) Пусть сначала данные точки X_1, X_2, X_3 не лежат на одной прямой. Если точка A_1 после симметрии относительно точек X_1, X_2, X_3 отобразилась в себя (см. рисунок), то X_1, X_2, X_3 — середины отрезков A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1, где $A_2=S_{X_1}(A_1)$, $A_3=S_{X_2}(A_2)$. Значит, $[A_1X_2]$, $[A_2X_3]$, $[A_3X_1]$ — медианы треугольника $A_1A_2A_3$, так что точки A_1, A_2, A_3 можно получить из точек X_1, X_2, X_3 гомотетией с центром в центре тяжести O треугольника $X_1X_2X_3$ и коэффициентом (-2). Этим положение точек A_i $(i=1, 2, 3)$ определяется однозначно. С другой стороны, каждая точка A_i при соответствующей композиции симметрий относительно точек X_i отображается в себя (например, $S_{X_2}(S_{X_1}(S_{X_3}(A_3)))=A_3$). Поэтому множество F — это три точки, получающиеся из данных точек X_1, X_2, X_3 гомотетией с центром O и коэффициентом (-2). Легко видеть, что, если данные точки X_1, X_2, X_3 лежат на прямой, ответ получается, в разумном смысле, тот же.

в) Глядя на выражение $(*)$, нетрудно сообразить, что в множестве F точек не больше, чем число способов выбрать из $2n+1$ данных точек те n точек, перед абсциссами которых в выражении $(*)$ будет стоять знак «минус», то есть не больше, чем C_{2n+1}^{n}. Очевидно, эта оценка точна (возьмите, например, $2n+1$ точек на одной прямой с целыми координатами $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2n}$).

Оценим теперь число неподвижных точек снизу. Спроектируем данные $2n+1$ точек на прямую так, чтобы никакие две точки не попали в одну. На этой прямой введем координаты и перенумеруем точки в порядке возрастания координат: $x_1<x_2<\ldots<x_{2n+1}$. Поставим n минусов перед первыми n числами и рассмотрим сумму $-x_1-x_2-\ldots-x_n+x_{n+1}+\ldots+x_{2n+1}$; она будет соответствовать некоторой неподвижной точке из нашего множества F. Далее произведем следующую операцию: выберем пару чисел x_i и x_{i+1} таких, что перед x_i стоит минус, а перед x_{i+1} — плюс, и поменяем у них знаки (на первом шаге, очевидно, $i=n$). Каждая такая операция приводит к сумме, соответствующей неподвижной точке из множества F, причем, поскольку после каждой такой операции сумма уменьшается, все эти неподвижные точки различны. Всего таких операций (вне зависимости от их порядка) мы можем произвести $n(n+1)$, что уже даст нам



$n(n+1)+1$ неподвижных точек. Значит, в F точек не меньше $n(n+1)+1$. Ровно столько неподвижных точек получится, если, например, снова взять $2n+1$ точек на прямой с целыми координатами $-n$, $-(n-1)$, ..., -1, 0, 1, 2, ..., $n-1$, n. При всевозможных способах расстановки n «минусов» перед некоторыми из них максимальное значение суммы этих чисел равно $2\cdot(1+2+\ldots+n)=n(n+1)$, минимальное значение равно $-n(n+1)$, причем сумма может принимать любое четное значение между числами $-n(n+1)$ и $n(n+1)$ — всего $n(n+1)+1$ значений.

И. Клумова, А. Талалай

◆

М606. *Функция f такова, что для всех действительных x $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$. Докажите, что f — периодическая функция.*

По условию для любого действительного x справедливы равенства

$$f(x+2)+f(x)=\sqrt{2}f(x+1)=\sqrt{2}(\sqrt{2}f(x)-f(x-1))=2f(x)-\sqrt{2}f(x-1),$$

то есть

$$f(x+2)=f(x)-\sqrt{2}f(x-1).$$

Поэтому

$$f(x+4)=f(x+2)-\sqrt{2}f(x+1)=f(x)-\sqrt{2}(f(x-1)+f(x+1))=-f(x).$$

Следовательно,

$$f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$$

для любого $x\in\mathbf{R}$, так что f — периодическая функция, период которой равен 8.

Заметим, что функции, удовлетворяющие исходному уравнению, существуют: например, $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$.

Э. Туркевич

◆

М607. *а) Разрежьте квадрат на равнобедренные трапеции.*
б) Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на равнобедренные трапеции.
в) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на равнобедренные трапеции.

Заметим, что правильный треугольник легко разбить на равнобедренные трапеции (рис. 1); поэтому достаточно довести разбиение до правильного треугольника.

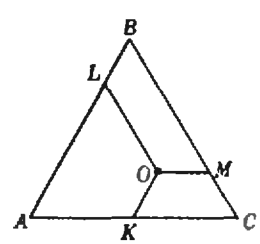


Рис. 1.

Теперь можно предложить следующие решения нашей задачи:

а) Искомые разбиения могут быть, например, такими, как на рисунках 2, 3.

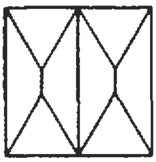


Рис. 2.

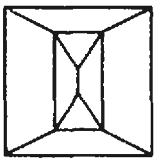


Рис. 3.

б) Равнобедренный прямоугольный треугольник может быть разрезан, например, так, как показано на рисунках 4 и 5. Каждое из этих разбиений дает новые способы разбиения квадрата.

Другие способы разрезания этих фигур получаются из пункта в).

в) Очевидно, каждый многоугольник разбивается на выпуклые многоугольники, а каждый выпуклый многоугольник разрезается на треугольники диагоналями, выходящими из любой вершины. Всякий же треугольник может быть разбит на два прямоугольных треугольника высотой, опущенной на одну из сторон; наконец, каждый прямоугольный треугольник можно разрезать на два равнобедренных, соединив середину гипотенузы с вершиной прямого угла.

Поэтому достаточно доказать утверждение для произвольного равнобедренного треугольника.

Будем для краткости называть равнобедренный треугольник с углом α при основании «α-треугольником».

Рассмотрим три случая.

1°. $30°<\alpha<60°$. Нужное разрезание представлено на рисунке 6.

2°. $0<\alpha<30°$. Как видно из рисунка 7, если можно разрезать 2α-треугольник, то можно разрезать и α-треугольник. Отсюда и из 1° последовательно получаем разрезаемость равнобедренных треугольников с углами при основании

$$15°<\alpha<30°,\ 7{,}5°<\alpha<15°,\ 3{,}75°<\alpha<7{,}5°\ldots$$

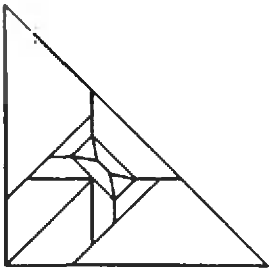


Рис. 4.

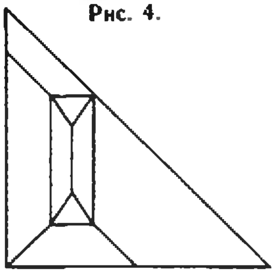


Рис. 5.

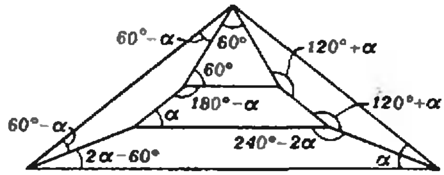


Рис. 6.

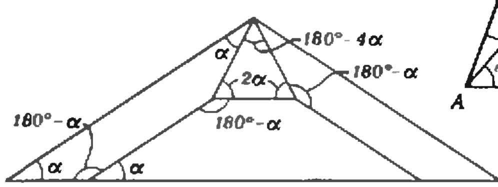


Рис. 7.

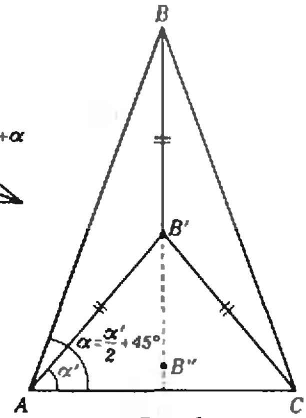


Рис. 8

Поскольку любое α, $0°<\alpha<30°$, попадает, очевидно, в один из указанных промежутков, получаем, что при $\alpha<30°$ всякий α-треугольник также можно разрезать нужным образом.

3°. $60°<\alpha<90°$. Доказательство аналогично случаю 2° (рис. 8). Очевидно, $\widehat{BAB'}=45°-\frac{\alpha'}{2}<45°$ (B' — центр окружности, описанной около треугольника ABC), и поэтому треугольники BAB' и BCB' «разрезаемы».

Продолжая указанный процесс для треугольников $AB'C$ (точка B''), $AB''C$, ..., мы, очевидно, рано или поздно получим равнобедренный треугольник с углом при основании, меньшим 60°.

В. Лев

◆

М608. *На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) нарисован n-угольник, все стороны которого лежат на линиях сетки и имеют нечетную длину.*

а) Докажите, что n делится на 4.

б) Докажите, что при $n=100$ площадь этого n-угольника обязательно нечетна. Выясните, какова четность площади при других n.

а) Очевидно, у данного многоугольника горизонтальных сторон столько же, сколько вертикальных, потому что горизонтальные и вертикальные стороны чередуются. Значит, $n=2k$, где k — число вертикальных (или горизонтальных) сторон. Так же очевидно, что сумма длин вертикальных сторон четна, поскольку в результате мы «спускаемся вниз» на столько же, на сколько «поднимаемся вверх». Но длина каждого отрезка нечетна; значит, вертикальных сторон — четное число, то есть $k=2m$. Поэтому $n=4m$ делится на 4.

б) Введем систему координат так, чтобы оси Ox и Oy содержали самую нижнюю и самую левую сторону нашего $4m$-угольника. Тогда координаты вершин нашего многоугольника будут равны

$$(a_1;\ b_1),\ (a_2;\ b_1),\ (a_2;\ b_2),\ (a_3;\ b_2),\ (a_3;\ b_3),\ \ldots,(a_{2m-1};\ b_{2m-1}),$$
$$(a_{2m};\ b_{2m-1}),\ (a_{2m};\ b_{2m}),\ (a_1;\ b_{2m}),$$

где a_i, b_i — целые неотрицательные числа, причем все разности $a_{i+1}-a_i$, $b_{i+1}-b_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ 2m)$ нечетны; здесь и ниже $a_{2m+1}=a_1$, $b_{2m+1}=b_1$. Нетрудно выразить через эти координаты и площадь S многоугольника, представив ее как сумму и разность площадей прямоугольников $|a_{i+1}-a_i|\times b_i$:

$$S=\left|\sum_{i=1}^{2m}(a_{i+1}-a_i)\,b_i\right|.$$

Поскольку все разности $a_{i+1}-a_i$ нечетны, сумма S имеет ту же четность, что и сумма $b_1+b_2+\ldots+b_{2m}$. Четности чисел b_1, b_2, ..., b_{2m} чередуются (поскольку все разности $b_{i+1}-b_i$ нечетны), так что все m сумм b_1+b_2, b_3+b_4, ..., $b_{2m-1}+b_{2m}$

нечетны. Итак, площадь S $4m$-угольника нечетна при m нечетном (в частности, 100-угольника при $m=25$) и четна при m четном.

Н. Васильев, И. Клумова

◆

Ф608. *Космический корабль массой $M=12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h=100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается реактивный двигатель. Скорость вылетающих из сопла ракеты газов $u=10^4$ м/с. Радиус Луны $R_л=1{,}7\cdot10^3$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_л=1{,}7$ м/с².*

1) Какое количество топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке A траектории корабля он опустился на Луну в точке B (рис. 1)?

2) Во втором варианте прилунения кораблю в точке A сообщается импульс в направлении на центр Луны, чтобы перевести корабль на орбиту, касающуюся Луны в точке C (рис. 2). Какое количество топлива необходимо израсходовать в этом случае?

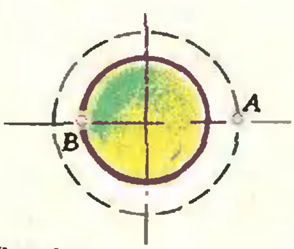


Рис. 1.

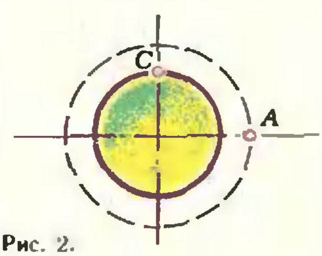


Рис. 2.

1) При движении корабля вокруг Луны по круговой орбите центростремительное ускорение кораблю сообщается силой тяготения. Поэтому

$$\frac{Mv^2}{R}=\gamma\frac{MM_л}{R^2},$$

где v — скорость корабля на круговой орбите, $M_л$ — масса Луны и $R=R_л+h$ — радиус орбиты корабля. Из этого уравнения находим

$$v=\sqrt{\gamma\frac{M_л}{R}}=\sqrt{g_л\frac{R_л^2}{R}}\approx1{,}65\cdot10^3\ \text{м/с}.$$

После изменения скорости корабля в точке A корабль перейдет на эллиптическую орбиту. Обозначим v_A и v_B скорости корабля соответственно в точках A и B этой орбиты. Согласно закону сохранения энергии

$$-\gamma\frac{M_лM_1}{R}+\frac{M_1v_A^2}{2}=-\gamma\frac{M_лM_1}{R_л}+\frac{M_1v_B^2}{2}\qquad(1)$$

($-\gamma\frac{MM_л}{R}$ — потенциальная энергия тела массы M на круговой орбите в поле тяготения Луны, M_1 — масса спускаемого аппарата); согласно закону сохранения момента импульса (или, что то же, согласно второму закону Кеплера)

$$v_AR=v_BR_л.\qquad(2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

$$v_A=\sqrt{2\gamma\frac{M_лR_л}{R(R_л+R)}}=v\sqrt{\frac{2R_л}{R+R_л}}.$$

Следовательно, для перехода с круговой орбиты на эллиптическую в точке A скорость корабля необходимо изменить на

$$\Delta v=v-v_A=v\left(1-\sqrt{\frac{2R_л}{R+R_л}}\right)=v\left(1-\sqrt{\frac{2R_л}{h+2R_л}}\right)=$$

$$=v\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2R_л}}}\right)\approx v\left[1-\left(1-\frac{h}{4R_л}\right)\right]=$$

$$=v\frac{h}{4R_л}\approx24\ \text{м/с}.$$

Так как двигатель включается на короткое время, можно считать, что импульс системы «спускаемый аппарат — топливо» сохраняется. Поэтому можно воспользоваться законом сохранения импульса, что дает

$$(M-m)\Delta v=mu,$$

где m — масса сгоревшего топлива. Отсюда

$$m=\frac{\Delta v}{\Delta v+u}M\approx\frac{\Delta v}{u}M\approx29\ \text{кг}.$$

2) Во втором случае скорость v корабля в точке A меняется на величину Δv, и скорость v_A на новой орбите такая, что $v_A^2=v^2+(\Delta v)^2$ (так как $\Delta\vec v\perp\vec v$).

Из закона сохранения энергии (выражение, аналогичное (1), с заменой v_B на v_C) и закона сохранения момента импульса ($v_AR=v_CR_л$) находим

$$\Delta v=\sqrt{g_л\frac{(R-R_л)^2}{R}}=\sqrt{g_л\frac{h^2}{R_л+h}}\approx97\ \text{м/с}.$$

Масса топлива, расходуемого в этом случае, равна

$$m \approx \frac{\Delta v}{u} M \approx 116 \text{ кг}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф609. *Деталь, изготовленная из алюминия, взвешивается на аналитических весах с помощью латунных гирь. При одном взвешивании воздух внутри весов сухой, при другом — влажный, давление водяных паров в котором равно $p_{в.п}=15{,}2$ мм рт. ст. Внешнее давление ($p=760$ мм рт. ст.) и температура ($t=20°C$) воздуха в обоих случаях одинаковы.*
При какой массе детали можно заметить разницу в показаниях весов, если их чувствительность $m_0=0{,}1$ мг? Плотность алюминия $\varrho_1=2{,}7$ г/см³, латуни $\varrho_2=8{,}5$ г/см³.

Запишем условие равновесия при взвешивании в сухом воздухе:

$$m_1g-F_{A1}=m_2g-F_{A2}.$$

Здесь $m_1=\varrho_1V_1$ — масса детали (V_1 — ее объем); $m_2=\varrho_2V_2g$ — масса гирь (V_2 — их объем); $F_{A1}=\varrho_{с.в}V_1g$, $F_{A2}=\varrho_{с.в}V_2g$ — архимедовы силы, действующие соответственно на деталь и на гири со стороны сухого воздуха ($\varrho_{с.в}$ — плотность сухого воздуха). Таким образом, в состоянии равновесия при взвешивании в сухом воздухе

$$(\varrho_1-\varrho_{с.в})V_1-(\varrho_2-\varrho_{с.в})V_2=0. \qquad (1)$$

Чтобы можно было обнаружить отклонение весов от равновесия во влажном воздухе (при той же массе гирь), должно выполняться условие

$$(\varrho_1-\varrho_{в.в})V_1-(\varrho_2-\varrho_{в.в})V_2>m_0, \qquad (2)$$

где $\varrho_{в.в}$ — плотность влажного воздуха.

Из (1) и (2) находим условие, которому должна удовлетворять масса детали:

$$m_1=\varrho_1V_1>m_0\varrho_1\frac{\varrho_2-\varrho_{с.в}}{(\varrho_{с.в}-\varrho_{в.в})(\varrho_2-\varrho_1)}. \qquad (3)$$

Выразим величины $\varrho_{с.в}$ и $\varrho_{в.в}$ через параметры, заданные в условии задачи — $T=293$ К, $p\approx10^5$ Па, $p_{в.п}\approx2\cdot10^3$ Па.

Из уравнения газового состояния $pV=\frac{m}{M}RT$ следует, что

$$\varrho_{с.в}=\frac{p_{с.в}M_{с.в}}{RT}=\frac{pM_{с.в}}{RT},$$

где $M_{с.в}=29\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса сухого воздуха. Плотность влажного воздуха равна

$$\varrho_{в.в}=\varrho'_{с.в}+\varrho_{в.п},$$

где $\varrho'_{с.в}$ — плотность сухого воздуха, имеющегося в объеме V влажного воздуха; $\varrho_{в.п}$ — плотность водяных паров, находящихся в объеме V влажного воздуха. Согласно уравнению газового состояния

$$\varrho_{в.п}=\frac{p_{в.п}M_{в.п}}{RT}, \quad \varrho'_{с.в}=\frac{(p-p_{в.п})M_{с.в}}{RT},$$

где $M_{в.п}=18\cdot10^{-3}$ мг/моль — молярная масса пара, $(p-p_{в.п})$ — парциальное давление сухого воздуха в объеме V влажного воздуха. Таким образом,

$$\varrho_{в.в}=\frac{(p-p_{в.п})M_{с.в}+p_{в.п}M_{в.п}}{RT}.$$

Подставив $\varrho_{с.в}$ и $\varrho_{в.в}$ в выражение (3), найдем

$$m_1=\varrho_1V_1>m_0\varrho_1\frac{\varrho_2RT-pM_{с.в}}{p_{в.п}(M_{с.в}-M_{в.п})(\varrho_2-\varrho_1)}\approx 43{,}2 \text{ г}.$$

В. Белонучкин

◆

Ф610. *В советско-французском эксперименте по оптической локации Луны импульсное излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda=0{,}69$ мкм направлялось с помощью телескопа с диаметром зеркала $D=2{,}6$ м на лунную поверхность. На Луне был установлен отражатель,*

1) Точность установки оптической оси телескопа определяется дифракционной расходимостью пучка:

$$\delta\varphi\approx\frac{\lambda}{D}=2{,}6\cdot10^{-7} \text{ рад}=0{,}05''.$$

2) Радиус светового пятна на Луне равен $\frac{\lambda}{D}L$. Следовательно, доля энергии лазера, попавшего на отражатель, составляет

$$K_1=\frac{d^2}{4(L\lambda/D)^2}=\left(\frac{dD}{2\lambda L}\right)^2$$

который работал как идеальное зеркало диаметра $d=20$ см, отражающее свет точно в обратном направлении. Отраженный свет улавливался тем же телескопом и фокусировался на фотоприемнике.

1) С какой точностью должна быть установлена оптическая ось телескопа в этом эксперименте?

2) Пренебрегая потерями света в атмосфере Земли и в телескопе, оценить, какая доля световой энергии лазера будет после отражения от Луны зарегистрирована фотоприемником.

3) Можно ли отраженный световой импульс зарегистрировать невооруженным глазом, если пороговую чувствительность глаза принять равной $n=100$ световых квантов, а энергия, излучаемая лазером в течение импульса, равна $W=1$ Дж?

4) Оценить выигрыш, который дает применение отражателя. Считать, что поверхность Луны рассеивает $\alpha=10\%$ падающего света равномерно в телесный угол 2π ср. Расстояние от Земли до Луны $L=380\cdot10^3$ км. Диаметр зрачка глаза принять равным $d_{зр}=5$ мм. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Радиус светового пятна на Земле, возникшего после отражения света от Луны, равен $\frac{\lambda}{d}L$. Поэтому доля отраженной энергии, попавшей в телескоп, составляет

$$K_2=\left(\frac{Dd}{2\lambda L}\right)^2.$$

Таким образом, доля энергии лазера, попавшей в фотоприемник после отражения света от отражателя на Луне, равна

$$K_0=K_1K_2=\left(\frac{dD}{2\lambda L}\right)^4\approx10^{-12}.$$

3) В зрачок невооруженного глаза попадает доля энергии лазера, равная

$$K_{зр}=K_0\left(\frac{d_{зр}}{D}\right)^2\approx3{,}7\cdot10^{-18}.$$

Это соответствует числу квантов

$$N=K_{зр}\frac{W}{h\nu}\approx12.$$

Так как $N<n$, невооруженным глазом зафиксировать отраженный импульс невозможно.

4) В отсутствие отражателя $\alpha=10\%$ энергии лазерного излучения, попавшего на Луну, рассеивается лунной поверхностью в телесном угле 2π ср. Телесный угол, в котором видно с Луны зеркало телескопа, составляет $\frac{\pi D^2}{4L^2}$ ср. Поэтому в телескоп попадает часть энергии

$$K=\alpha\frac{\pi D^2/4L^2}{2\pi}=\alpha\frac{D^2}{8L^2}\approx0{,}5\cdot10^{-18}.$$

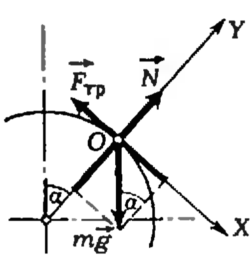
Таким образом, выигрыш, который дает применение отражателя, составляет

$$\beta=\frac{K_0}{K}=2\cdot10^6.$$

С. Козел

◆

Ф611. *Акробат, находясь на боковой поверхности цилиндра, лежащего на очень шероховатом полу, перебирает ногами и движется с постоянной скоростью вправо. Считая коэффициент трения ботинок акробата о поверхность цилиндра равным μ, определить предельный угол α, который может составить с вертикалью радиус цилиндра, проведенный в точку, в которой находится акробат. Чему будет равна при этом сила трения ботинок акробата о цилиндр?*



Силы, действующие на акробата, это сила тяжести $m\vec g$, сила трения $\vec F_{тр}$ и сила нормальной реакции $\vec N$ (см. рисунок). По условию задачи акробат движется с постоянной скоростью. Следовательно, согласно II закону Ньютона, векторная сумма сил $m\vec g$, $\vec F_{тр}$ и $\vec N$ равна нулю. Запишем это условие в проекциях на оси X и Y, направленные так, как на рисунке (система координат XOY движется вправо с той же скоростью, что и акробат; начало координат совпадает с точкой, в которой находится акробат):

в проекциях на ось X —

$$mg\sin\alpha-F_{тр}=0; \qquad (1)$$

в проекциях на ось Y —

$$N-mg\cos\alpha=0. \qquad (2)$$

Учитывая, что $F_{тр}\leqslant\mu N$, из (1) и (2) находим предельный угол $\alpha=\alpha_0$:

$$\alpha_0=\operatorname{arctg}\mu.$$

Величина силы трения при $\alpha=\alpha_0$ равна

$$F=mg\sin\alpha_0=mg\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

С. Кротов

Ф612. *Какое количество теплоты Q необходимо сообщить $m=0,1$ кг неона для его нагревания на $\Delta t=5°C$, если при нагревании давление неона прямо пропорционально его объему?*

Согласно первому началу термодинамики

$$Q=\Delta U+A, \qquad (*)$$

где ΔU — изменение внутренней энергии неона; A — работа, совершенная газом при его нагревании.

Неон — одноатомный газ. Поэтому

$$\Delta U=\frac{3}{2}\nu R(\Delta T)=\frac{3}{2}\frac{m}{M}R(\Delta T)$$

($\nu=\frac{m}{M}$ — число молей неона, $M=20\cdot10^{-3}$ кг/моль — его молярная масса).

Работа A газа равна произведению среднего давления $p_{ср}$ на изменение объема:

$$A=p_{ср}V=p_{ср}(V_2-V_1),$$

где V_2 — конечный, V_1 — начальный объемы газа. Так как при нагревании газа давление пропорционально объему, среднее давление равно среднему арифметическому начального p_1 и конечного p_2 давлений. Поэтому

$$A=\frac{1}{2}(p_2+p_1)(V_2-V_1).$$

Эту формулу можно преобразовать так:

$$A=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)+\frac{1}{2}(p_1V_2-p_2V_1).$$

Давление неона при нагревании прямо пропорционально его объему, то есть $p_1=\alpha V_1$, $p_2=\alpha V_2$, где α — коэффициент пропорциональности. Поэтому $p_1V_2-p_2V_1=\alpha V_1V_2-\alpha V_2V_1=0$.

Таким образом,

$$A=\frac{1}{2}(p_2V_2-p_1V_1)=\frac{1}{2}\Delta(pV),$$

где $\Delta(pV)$ — изменение произведения pV. Согласно уравнению газового состояния $pV=\frac{m}{M}RT$, поэтому $\Delta(pV)=\frac{m}{M}R(\Delta T)$ и

$$A=\frac{1}{2}\frac{m}{M}R(\Delta T).$$

Подставив значения ΔU и A в выражение $(*)$, найдем

$$Q=2\frac{m}{M}R(\Delta T)\approx41,5\text{ Дж}.$$

И. Слободецкий

А. Аврамов

Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля

Задача, в которой пойдет речь в этой заметке (М602 — «Квант», 1980, № 2), связана с *треугольником Паскаля* — числовым треугольником, n-я строка которого ($n=0, 1, 2, 3, \dots$) состоит из $n+1$ чисел

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \dots,\ C_n^n$$

(C_n^m — число сочетаний из n по m)*).

На рисунке (с. 28) приведены первые восемь строк треугольника Паскаля ($n=0, 1, 2, \dots, 7$). Восьмая строка ($n=7$) состоит из чисел

$$1,\ 7,\ 21,\ 35,\ 35,\ 21,\ 7,\ 1.$$

Она замечательна тем, что в ней второе, третье и четвертое (а также пятое, шестое и седьмое) числа образуют арифметическую прогрессию.

А есть ли в треугольнике Паскаля другие строки с аналогичным

*) О треугольнике Паскаля см. пособие «Алгебра и начала анализа 9», п. 7, 8. Кроме того, в 1979 году в издательстве «Наука» в серии «Популярные лекции по математике» вышло 2-е издание брошюры В. А. Успенского «Треугольник Паскаля».

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1

свойством, то есть строки, в которых три числа, стоящие рядом, образовывали бы арифметическую прогрессию?

Допустим, что существуют натуральные n и k такие, что тройка чисел C_n^{k-1}, C_n^k, C_n^{k+1} является арифметической прогрессией. Это означает, что

$$2C_n^k = C_n^{k-1} + C_n^{k+1}$$

$(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, то есть

$$\frac{2n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!},$$

откуда получаем уравнение

$$4k^2 - 4nk + n^2 - n - 2 = 0, \qquad (1)$$

которое надо решить в натуральных числах.

Решим его как квадратное уравнение относительно k:

$$k_{1,2} = \frac{n \mp \sqrt{n+2}}{2}.$$

Положим $n+2=t^2$, где t — некоторое натуральное число. Получим

$$k_1 = \frac{(t+1)(t-2)}{2},$$

$$k_2 = \frac{(t-1)(t+2)}{2},$$

причем при $t \geqslant 3$ и k_1, и k_2 — натуральные числа, $1<k_1<n-1$, $1<k_2<<n-1$.

Итак, если натуральные n и k удовлетворяют уравнению (1), то они находятся по формулам

$$\begin{cases} n = t^2 - 2, \\ k_{1,2} = \dfrac{t^2 \mp t - 2}{2}, \end{cases} \qquad (2)$$

где t — натуральное число и $t \geqslant 3$.

Кроме того, для всех натуральных $t \geqslant 3$ каждая пара чисел n и k, получающихся по формулам (2), удовлетворяет уравнению (1) — убедитесь в этом.

Этим доказано, что в треугольнике Паскаля бесконечно много строк, содержащих трехчленные арифметические прогрессии из подряд идущих чисел. При этом каждая такая строка содержит две прогрессии. Это и неудивительно: ведь треугольник Паскаля симметричен. Поэтому обе эти прогрессии состоят из одних и тех же чисел: первая (получающаяся при $k=k_1$) возрастает, а вторая (при $k=k_2$) убывает.

При $t=3$ получаем $n=7$ — с этой строки мы начали свои наблюдения. При $t=4$ получаем $n=14$, $k_1=5$, $k_2=9$. Это соответствует пятнадцатой строке треугольника Паскаля: 1, 14, 91, 364, 1001, 2002, 3003, 3432, 3003, 2002, 1001, 364, 91, 14, 1; здесь выделенные числа образуют арифметическую прогрессию.

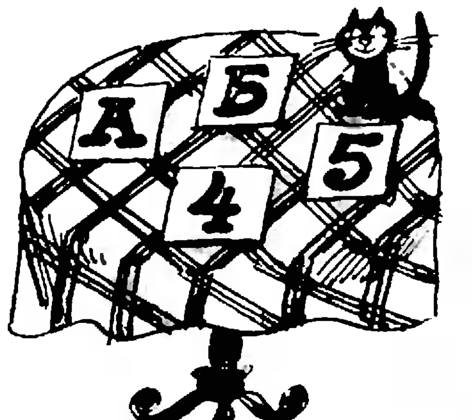
А что будет, если $t<3$? $t=1$, очевидно, не годится, а при $t=2$ получаем $n=2$, $k_1=0$, $k_2=2$. Это соответствует третьей строке треугольника, в которой стоят числа 1, 2, 1. Если слева и справа к ним приписать по нулю и отсчитывать числа от нуля, мы снова получим две арифметические прогрессии: 0, 1, 2 и 2, 1, 0.

Легко видеть, что в треугольнике Паскаля нет ни одной строки, в которой была бы арифметическая прогрессия, состоящая более чем из трех членов (идущих подряд). В самом деле, если бы такая строка нашлась, то в ней было бы не менее двух трехчленных арифметических прогрессий, состоящих из разных членов. Но выше мы показали, что каждая строка с арифметической прогрессией (в которой числа идут подряд) устроена так: в ней ровно две прогрессии, составленные из одних и тех же чисел.

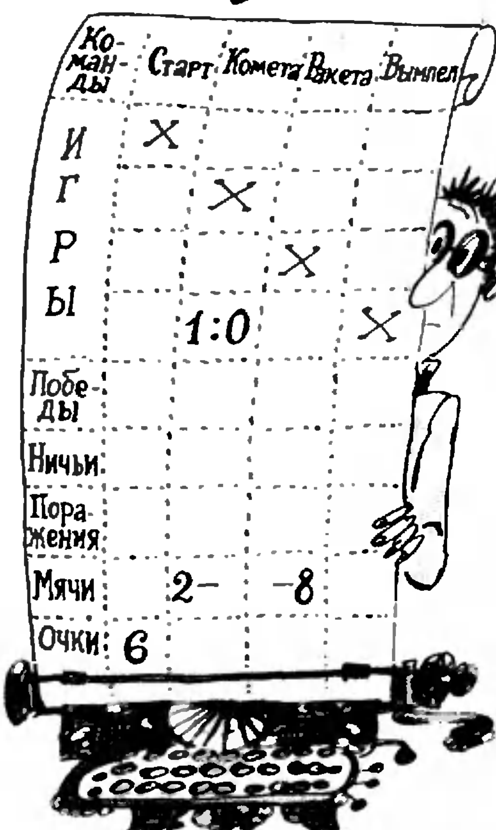
Мы предлагаем вам убедиться самостоятельно в том, что в треугольнике Паскаля нет ни одной строки, в которой была бы трехчленная *геометрическая* прогрессия.

«Квант» для младших школьников

Задачи



1. На столе лежат четыре карточки (см. рисунок).
Известно, что на каждой карточке с одной стороны — буква, а с другой — натуральное число. Какие карточки достаточно перевернуть, чтобы выяснить, истинно или ложно предложение *Если на одной стороне карточки — гласная буква, то на другой — четное число?*

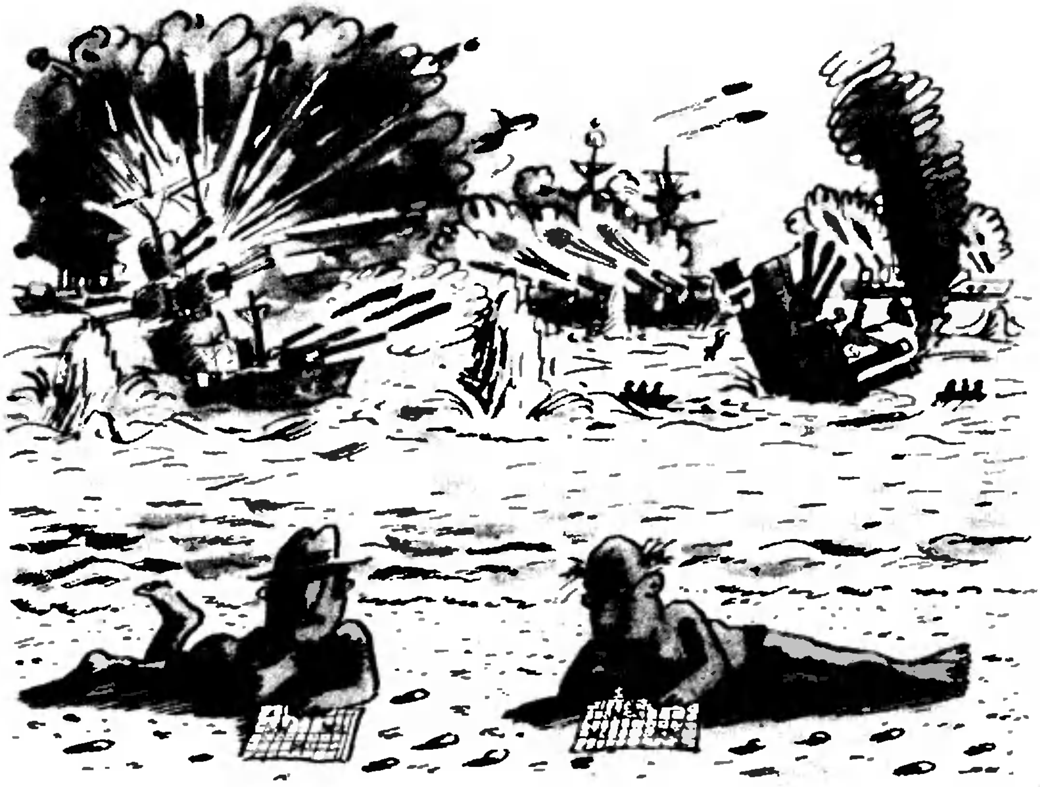


2. Четыре футбольные команды: «Старт», «Комета», «Ракета» и «Вымпел» — провели каждая с каждой по одному матчу. Судья изготовил таблицу, содержащую результаты их встреч. Машинистка отпечатала таблицу с образца и отдала ее судье. Но оказалось, что печатная машинка (она была очень старая) почти ничего не отпечатала (см. рисунок). Однако судья помнил, что остальные матчи окончились со счетом 2:0, 1:1, 2:2, 3:1, 5:3. Помогите судье заполнить таблицу! (В графе «Мячи» слева записывается количество забитых мячей, справа — количество пропущенных мячей. За победу начисляется 2 очка, за ничью — по 1 очку.)

3. Даны 1980 последовательных натуральных чисел. Можно ли возвести каждое число в какую-нибудь четную степень так, чтобы сумма полученных чисел была квадратом натурального числа?

4. Десять одинаковых монет образуют равносторонний треугольник, направленный «вниз» (см. рисунок). Переложите ровно три монеты так, чтобы получился равносторонний треугольник, направленный «вверх».

Эти задачи нам предложили Э. Абдуллаев, Н. Никольская, Ц. Ремоappов, А. Халамайзер



Е. Гик

Морской бой

Трудно представить себе человека, который ни разу в жизни не играл в морской бой. Каждый из двух игроков рисует на клетчатом листе бумаги две доски размером 10×10. На одной из них он расставляет свои корабли, а на второй стремится угадать расположение кораблей противника. В состав флотилии входят десять кораблей: один *линкор* (корабль размером 4×1), два *крейсера* ($3\times\times1$), три *эсминца* (2×1) и четыре *катера* (1×1). Корабли могут занимать любые поля доски, но не должны касаться друг друга ни сторонами, ни углами.

После размещения своего флота игроки начинают по очереди «стрелять» по неприятельским кораблям, то есть называть поля доски — а3, в7, к9 и т. д. (горизонтали доски обозначаются числами от 1 до 10, а вертикали — буквами от а до к; см. рисунок 1). После каждого выстрела игрок получает от партнера следующую информацию: «попал», если выстрел пришелся на поле с кораблем, «потопил», если это последнее поле корабля (то есть по остальным полям, занятым им, попадание произошло раньше), и, наконец, «промах», если поле пустое. В первых двух случаях игрок получает право на дополнительный выстрел и т. д., до первого промаха, после чего очередь хода передается партнеру. Победителем становится игрок, которому удается первым потопить все десять кораблей противника.

Обычно выстрел в морском бое обозначается точкой, а при попадании в корабль точка превращается в крестик (при этом потопленный корабль обводится прямоугольником). Конечно, точки ставятся и на те поля, про которые уже точно известно, что они не могут входить в состав ни одного из кораблей (лежат наискосок от «подбитых» полей или окружают потопленный корабль).

Очевидно, традиционная форма доски в морском бое, вид кораблей и состав флотилии особого значения

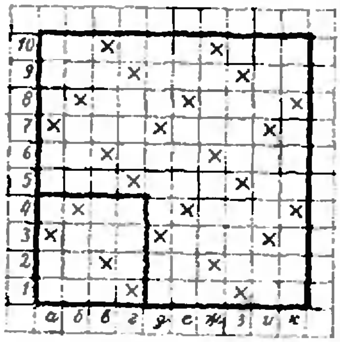


Рис. 1.

не имеют; так, шахматисты, возможно, предпочтут играть на доске 8×8.

Ясно, что успех в морском бое в какой-то мере зависит от везения. Можно совершенно беспорядочно наносить удары по «морю» и при этом без промаха уничтожить все корабли противника. Но вряд ли на это стоит рассчитывать. С другой стороны, если нам известно пристрастие партнера располагать корабли в центре доски или, наоборот, на ее краю, то это повышает наши шансы.

Если говорить об искусстве игры в морской бой, возникают два вопроса: 1) как производить выстрелы, чтобы повысить вероятность попадания в неприятельские корабли, 2) как расставить свои собственные корабли, чтобы противнику было труднее их потопить?

Предположим, что мы хотим попасть в неприятельский линкор. Если мы будем стрелять последовательно сначала по полям первой горизонтали (слева направо), затем по полям второй горизонтали и т. д., то не исключено, что мы попадем в линкор только на 97-м ходу (если он занимает поля с ж10 по к10). Однако, если мы будем наносить удары только по полям, обозначенным крестиками на рисунке 1, мы наверняка попадем в линкор не позднее 24-го хода.

Интересно рассмотреть более общий случай. Пусть на доске $n\times n$ расположен корабль $k\times1$. Совокупность выстрелов, гарантирующих нам попадание в этот корабль, назовем *стратегией*. Стратегию, содержащую минимальное число выстрелов, назовем *наилучшей*.

Одна из наилучших стратегий для обнаружения линкора на доске 4×4 выделена в левом нижнем квадрате на рисунке 1 (она состоит из четырех выстрелов). Наилучшие стратегии для доски $n\times n$ можно получить из нее соответствующими сдвигами вверх и вправо на 4 поля; в частности, на рисунке 1 указана стратегия для доски 10×10. Ясно, что для попадания в корабль $k\times1$, расположенный на доске $n\times n$, выстрелы должны отстоять друг от друга на k полей по вертикали и на столько же по горизонтали. Это означает, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали содержится примерно по $\frac{n}{k}$ выстрелов наилучшей стратегии; значит, общее число выстрелов равно приблизительно $\frac{n^2}{k}$, а для линкора $\approx\frac{n^2}{4}$.

З а д а ч а 1*). а) Сколько существует наилучших стратегий для попадания в линкор 4×1 на доске 4×4? б) Тот же вопрос для доски 10×10. (Стратегии, совпадающие при поворотах и отражениях доски, считаются одинаковыми.)

Опытные игроки в морской бой обычно действуют так. Сначала, пользуясь стратегией типа той, что представлена на рисунке 1, обнаруживают линкор противника. Когда с ним покончено, принимаются за поиск крейсеров. Теперь удары наносятся не через четыре поля по вертикали и горизонтали, а через три. Потопив оба крейсера, переходят к эсминцам. Когда на доске остаются одни катера, удары по всем ее свободным полям наносятся в произвольном порядке. Конечно, более «легкие» корабли могут быть обнаружены и при охоте за более «тяжелыми».

Итак, труднее всего обстоит дело с потоплением катеров; по существу, для их обнаружения не существует никакой стратегии. Поэтому при размещении своей флотилии игрокам надо расположить все крупные ко-

---

*) Задачи 1, 2 принадлежат В. Ч в а н о в у.

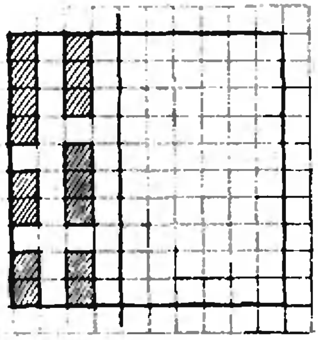
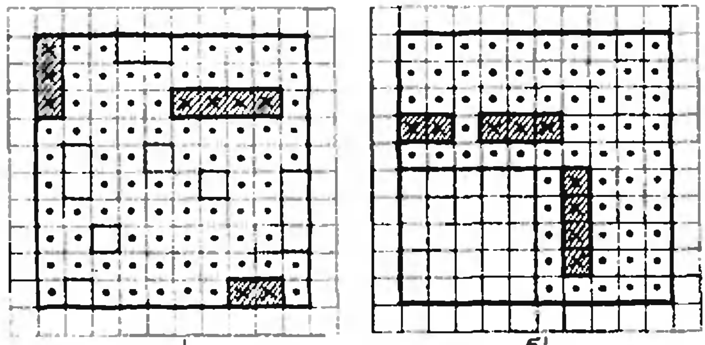


Рис. 2.



а) б)

Рис. 3.

рабли поплотнее, оставив противнику для поиска катеров как можно больше свободного пространства. Наиболее выгодное в этом смысле расположение кораблей представлено на рисунке 2. Если даже противник уже потопил все шесть крупных кораблей (слева от черты), для поиска четырех катеров у него имеется наибольшая территория — 60 полей (справа от черты).

Конечно, случайность в морском бое играет немалую роль, и без промахов здесь не обойтись. Тем интереснее ситуации, в которых промахи недопустимы. Рассмотрим «окончание» одной партии в морской бой.

На рисунке 3 изображена «позиция», которая возникла в процессе игры. К данному моменту обе флотилии — и наша (рис. 3, *а*), и противника (рис. 3, *б*) — пострадали одинаково. Расположение всех наших кораблей противнику уже известно (на рисунке 3, *а* они обведены пунктиром), и при своем ходе он без единого промаха разгромит весь наш флот. Но сейчас ход наш, и судьба партии в наших руках. В этом «тяжелом» бою нам нужно уничтожить один за другим все семь кораблей противника, сосредоточенных в квадрате а1-д1-д5-а5. Комбинация, позволяющая нам одержать победу в этом напряженном бою, вытекает из решения следующей задачи.

З а д а ч а 2. Докажите, что при любом расположении на доске 5×5 крейсера, двух эсминцев и четырех катеров их можно потопить без единого промаха.

Существует множество модификаций игры в морской бой. Например, ход может состоять не из одного выстрела, а сразу из нескольких; ведется, так сказать, массированный огонь по неприятельскому флоту. Соперник сообщает общие результаты стрельбы, не указывая при этом, в какой корабль и на каком поле произошло попадание. Остальные правила не меняются. После каждого хода и ответа на него игроки извлекают определенную информацию о дислокации неприятельских кораблей и на следующих ходах пытаются использовать ее.

В другом варианте игры каждому партнеру разрешается одновременно производить выстрелы по стольким полям доски, сколько у него еще осталось непотопленных кораблей (первый ход состоит из десяти выстрелов). Обстреливаемый игрок вновь сообщает стреляющему только общее число попаданий, потоплений и промахов. Когда все корабли пойдут на дно, игрок лишается права хода (0 выстрелов), но оно ему больше и не нужно — бой закончился его поражением.

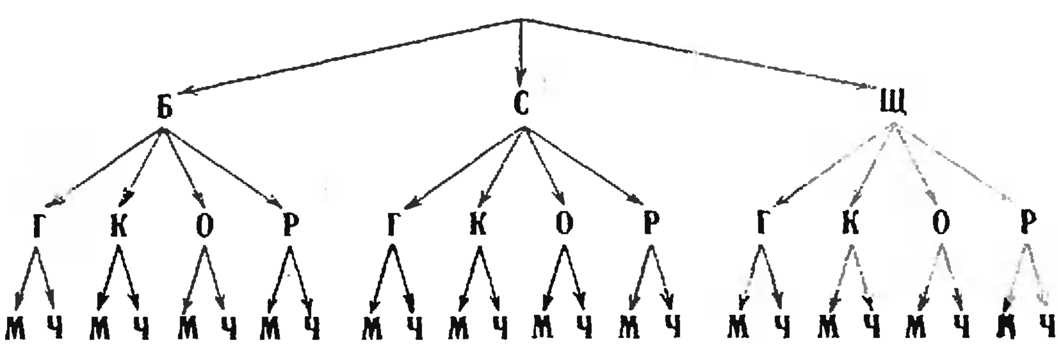
Ю. Иванов

Сколько вариантов?

Ах, эти задачи, начинающиеся со слов «Сколькими способами можно...»! Учителя знают, какую путаницу в качестве решений таких задач предлагают иногда школьники. В настоящее время эта тематика (комбинаторика) осталась лишь в факультативе. Предлагаемый материал как раз разрабатывался на факультативе по математике для IX класса, но, по нашему убеждению, будет интересен и полезен не только его участникам. В публикуемой ниже первой части статьи разбираются задачи, решаемые по «правилу произведения»; во второй части (которую мы опубликуем в следующем номере) приемы решения будут разнообразнее.

Схема перебора

Представим себе, что мы зашли в столовую и решили выбрать обед из трех блюд. Мы смотрим в меню и видим в перечне первых блюд борщ, суп и щи, в перечне вторых блюд — гуляш, котлеты, оладьи и рыбу и, наконец, на третье нам предлагают морс или чай. Все представленные нам возможности удобно изобразить следующей схемой (см. рисунок).



На этой схеме представлены все варианты выбора обеда. Три строчки схемы соответствуют тому, что выбор обеда осуществляется в три шага. На первом шаге мы выбираем первое блюдо (три имеющихся у нас возможности обозначены буквами Б, С, Щ). Независимо от принятого нами на первом шаге решения у нас есть четыре возможности выбора второго блюда. На схеме эта независимость выражается в том, что из букв первой строчки выходит поровну стрелок во вторую строчку (а именно по четыре стрелки). Независимо от того, какие блюда мы выбрали на первых двух шагах, у нас есть две возможности выбора третьего блюда, и на схеме из каждой буквы второй строчки выходят две стрелки в третью строчку. Каждому варианту обеда соответствует на схеме путь, идущий по стрелкам из верхней строчки в нижнюю. Так, например, путь С→К→М соответствует обеду «суп — котлеты — морс», а путь Щ→К→Ч соответствует обеду «щи — котлеты — чай».

С помощью схемы легко подсчитать число всех возможных вариантов выбора обеда — оно равно числу путей из верхней строчки в нижнюю или, что то же самое, числу букв в нижней строчке. Так как в первой строчке 3 буквы, во второй вчетверо больше — $3 \cdot 4$, а в третьей вдвое больше, чем во второй, — $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$, всего возможно 24 варианта обеда.

Именно подсчет числа возможных вариантов будет нашей целью в последующих задачах. Такой подсчет удобно осуществлять с помощью схем, подобных изображенной на рисунке 1. При этом схему не обязательно рисовать — достаточно лишь представить ее себе, тем более что при большом числе вариантов нарисовать схему невозможно.

Разберем теперь несколько задач.

З а д а ч а 1. *Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны?*

Р е ш е н и е. Построение каждого четырехзначного числа, удовлетворяющего условию задачи, можно разбить на четыре шага. На первом шаге выбирается первая цифра числа. Такой выбор можно осуществить девятью способами (цифра 0 не может быть первой цифрой числа), так что в первой строчке воображаемой схемы 9 цифр. На втором шаге выбирается вторая цифра числа. Хотя выбор второй цифры зависит от выбора первой цифры (вторая цифра должна быть отлична от первой), но число возможностей выбора второй цифры, независимо от цифры, выбранной на первом шаге, равно 9. Поэтому из каждой цифры первой строки воображаемой схемы выйдет 9 стрелок во вторую строку, в которой, следовательно, будет $9 \cdot 9$ цифр. На третьем шаге выбирается третья цифра; так как она должна быть отлична от цифр, выбранных на первых двух шагах, независимо от решения, принятого нами на первых двух шагах, на третьем шаге нам предоставляется выбор из восьми возможностей. Следовательно, в третьей строке схемы будет $9 \cdot 9 \cdot 8$ цифр. На четвертом шаге мы можем выбрать любую из семи цифр, не использованных на первых трех шагах, и потому число цифр в нижней строке равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. Так как число цифр в нижней строке равно, очевидно, числу путей из верхней строки в нижнюю, 4536 и есть требуемое число.

У п р а ж н е н и е 1. Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

З а д а ч а 2. *Сколько различных натуральных делителей имеет число* $2^3 \cdot 3^{10} \cdot 7^{15} \cdot 11^9$?

Р е ш е н и е. Ясно, что каждый делитель такого числа имеет вид $2^k \cdot 3^l \cdot 7^m \cdot 11^n$, где $0 \leqslant k \leqslant 7$, $0 \leqslant l \leqslant 10$, $0 \leqslant m \leqslant 15$, $0 \leqslant n \leqslant 9$. Выбор каждого делителя может быть поэтому разбит на четыре шага: выбор k, выбор l, выбор m, выбор n. Так как первый шаг мы можем осуществить восемью способами, на втором шаге, независимо от первого шага, у нас 11 возможностей, на третьем шаге, независимо от первых двух шагов, есть 16 возможностей и, наконец, независимо от первых трех шагов, мы можем десятью способами осуществить четвертый шаг, рассуждая так же, как и в предыдущих задачах, мы придем к ответу $8 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 10 = 14\,080$.

Аналогичные рассуждения приводят к общей формуле для числа делителей $\tau(n)$ натурального числа n, если известно разложение числа n на простые множители. Именно, *если* $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$, *где* $p_1, p_2, \ldots, p_s$ *— различные простые числа,* $k_1, k_2, \ldots, k_s$ *— натуральные числа, то*

$$\tau(n) = (k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_s+1).$$

У п р а ж н е н и е 2. Сколько различных натуральных делителей имеет число $20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$?

Правило произведения

Во всех разобранных задачах подсчет числа интересующих нас предметов (вариантов обеда, четырехзначных чисел с неповторяющимися цифрами, делителей данного числа) происходил по одной и той же схеме: мы представляли себе построение произвольного из пересчитываемых предметов в виде последовательности нескольких шагов, на каждом из которых число возможностей выбора легко находилось и не зависело от решений, принятых на предыдущих шагах. Произведение этих чисел и давало ответ задачи. Эту схему решения принято называть «правилом произведения»:

Предположим, что нам нужно подсчитать количество предметов, удовлетворяющих некоторым условиям. Предположим, что построение произвольного такого предмета мы разбили на несколько последовательных шагов, причем на первом шаге у нас есть выбор из a_1 *возможно-*

стей; независимо от результата первого шага, у нас есть a_2 различных возможностей на втором шаге; независимо от результатов первых двух шагов, есть a_3 способов осуществления третьего шага и т. д.; наконец, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, у нас есть a_n возможностей осуществления последнего шага. Тогда общее количество пересчитываемых предметов равно произведению $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.

Упражнение 3. В номере автомашины стоят в начале три буквы русского алфавита (содержащего 33 буквы), а затем четыре цифры. Сколько можно составить различных номеров автомашин?

Упражнение 4. На рояле 88 клавиш. Сколькими способами можно последовательно извлечь 6 звуков?

Разберем теперь несколько более трудную задачу.

Задача 3. *Сколько имеется четных четырехзначных чисел, составленных из цифр 1, 3, 4, 6, 7, в записи каждого из которых соседние цифры различны?*

Решение. Если на первом шаге выбирать первую цифру такого числа, на втором шаге — вторую цифру и т. д., то на первом шаге у нас 5 возможностей, на втором и третьем шагах по 4 возможности (на каждом из этих шагов мы можем выбирать любую цифру, кроме той, которая выбрана на предыдущем шаге). Однако при осуществлении четвертого шага число возможностей зависит от результата предыдущего шага: так как последняя цифра должна быть четной и отличной от предпоследней цифры, то мы имеем на последнем шаге две возможности, если на третьем шаге была выбрана одна из цифр 1, 3, 7, и одну возможность, если в качестве третьей цифры мы выбрали 4 или 6.

Выходит, что правило произведения к решению данной задачи неприменимо? Этот вывод был бы преждевременным. Правило произведения неприменимо из-за неудачно выбранной нами последовательности шагов построения четырехзначного числа с требуемыми свойствами. Если же мы на первом шаге будем выбирать четвертую цифру, а затем третью, вторую и первую, то у нас будет 2 возможности на первом шаге и по 4 возможности на каждом из последующих шагов. По правилу произведения искомое число четырехзначных чисел равно $2 \cdot 4^3 = 128$.

Искусство решения комбинаторных задач (так называют рассматриваемые нами задачи пересчета) в значительной степени состоит в умении выбрать последовательность шагов, приводящих к построению пересчитываемых предметов. Как правило, эту последовательность выбирают так, чтобы на первых шагах удовлетворить максимальному числу ограничений, накладываемых условием задачи.

Упражнение 5. Сколько имеется пятизначных чисел n, удовлетворяющих условию:

а) n оканчивается двумя семерками;

б) n начинается с двух одинаковых цифр;

в) все цифры числа n различны, причем вторая и четвертая цифры нечетны;

г)* n делится на 4, его соседние цифры различны и отличны от 0, 4, 8?

Упражнение 6*. На координатной плоскости рисуются всевозможные ломаные, все вершины которых имеют целые координаты, а звенья параллельны координатным осям и не проходят дважды через одну вершину; L_n — число таких ломаных, выходящих из начала координат и имеющих длину n. Докажите, что $4 \cdot 2^{n-1} < L_n < 4 \cdot 3^{n-1}$.

Перестановки

Начнем с такой задачи.

Задача 4. *Сколькими способами можно выписать в колонку фамилии 30 учеников?*

Решение. Здесь последовательность шагов такова: сначала выбираем ученика на первое место, затем ученика на второе место и т. д. На первом шаге у нас 30 возможностей, на втором — 29 возможностей, на третьем — 28 возможностей и т. д., наконец, на последнем, тридцатом шаге у нас останется 1 возможность: записать ученика, чья фамилия не была написана ни на одном из 29 предыдущих шагов. Ответом задачи является, следовательно, число $30! = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Эту задачу мы привели здесь лишь потому, что она является частным случаем следующей важной задачи.

Задача 5 (число перестановок из n элементов). *Сколькими способами можно упорядочить данное множество, состоящее из n элементов?*

Упорядочить множество — значит расположить его элементы в некотором порядке. Каждое такое расположение называют *перестановкой* данного множества. Таким образом, задачу можно сформулировать так: сколько существует перестановок множества из n элементов? Рассуждая так же, как и в задаче со списком учеников (каждый такой список — это перестановка множества учеников), мы получим, что *число перестановок n-элементного множества равно* $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Упражнение 7. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает третье место, цифра 4 — пятое место, цифра 7 — седьмое место?

Упражнение 8. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладьей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

Упражнение 9. Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 6 следует непосредственно за цифрой 9?

Разберем теперь две задачи, при решении которых используются как формула для числа перестановок, так и правило произведения.

Задача 6. *Сколько существует перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых четырех мест, а цифра 9 — одно из трех последних мест?*

Решение. Построение произвольной такой перестановки разобьем на три шага: выберем место для цифры 0 (первый шаг), выберем место для цифры 9 (второй шаг), расположим остальные восемь цифр на оставшихся восьми местах (третий шаг). На первом шаге у нас 4 возможности; независимо от того, какую возможность мы изберем, у нас есть 3 возможности на втором шаге и, наконец, как бы мы ни расположили цифры 0 и 9, у нас будет 8! возможностей расположения остальных восьми цифр на восьми местах. Согласно правилу произведения, число $4 \cdot 3 \cdot 8! = 12 \cdot 8!$ является решением задачи.

Как видите, на третьем шаге мы воспользовались решенной ранее задачей о числе перестановок восьми предметов. При решении комбинаторных задач на перебор вариантов есть возможность эффективно использовать накопленный опыт: любая решенная задача может помочь на одном из шагов в более сложной задаче.

Задача 7. *Сколькими способами можно рассадить за 15 парт 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы за каждой партой слева сидел мальчик, а справа — девочка?*

Решение. Построение произвольного варианта рассадки разобьем на два шага: рассадим 15 мальчиков на пятнадцати предназначенных для них местах, а затем рассадим 15 девочек на пятнадцати оставшихся местах. На каждом шаге мы решаем задачу о перестановке пятнадцати человек и потому имеем 15! возможностей. В силу правила произведения ответом задачи является число $(15!)^2$.

Упражнение 10. Сколькими способами можно расставить на полке четыре десятитомных собрания сочинений так, чтобы все тома каждого из собраний сочинений стояли подряд, хотя и не обязательно в порядке следования томов?

Упражнение 11. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых между цифрами 2 и 3 стоят три другие цифры?

Число подмножеств конечного множества

Число, указанное в подзаголовке, часто встречается в задачах. Попытаемся его найти в частных случаях.

Выпишем все подмножества каждого из множеств

$A = \{a_1; a_2\}$, $B = \{a_1; a_2; a_3\}$, $C = \{a_1; a_2; a_3; a_4\}$.

Подмножества множества A:
$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_1; a_2\}$.

Подмножества множества B:
$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1; a_2\}$, $\{a_1; a_3\}$, $\{a_2; a_3\}$, $\{a_1; a_2; a_3\}$.

Подмножества множества C:
$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_4\}$, $\{a_1; a_2\}$, $\{a_1; a_3\}$, $\{a_1; a_4\}$, $\{a_2; a_3\}$, $\{a_2; a_4\}$, $\{a_3; a_4\}$,

$\{a_1; a_2; a_3\}$, $\{a_1; a_2; a_4\}$, $\{a_1; a_3; a_4\}$, $\{a_2; a_3; a_4\}$, $\{a_1; a_2; a_3; a_4\}$.
Таким образом, в множестве A четыре подмножества, в множестве B восемь подмножеств, в множестве C 16 подмножеств.

Выписывая подмножества, мы располагали их по возрастанию числа элементов. Пытаясь таким путем подсчитать число подмножеств произвольного конечного множества, мы приходим к более трудной задаче подсчета числа подмножеств с заданным числом элементов. Однако есть и другой путь решения задачи.

Пусть $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ — n-элементное множество. Выбор произвольного подмножества B множества A можно разбить на следующие шаги: на первом шаге мы решаем, включать ли элемент a_1 в подмножество B, на втором шаге мы решаем, включать ли в B элемент a_2, и т. д., на последнем, n-м шаге мы решаем, включать ли в подмножество B элемент a_n. Так как на каждом шаге, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, у нас есть две возможности (включать в B очередной элемент или не включать), то по правилу произведения число подмножеств множества A равно произведению n двоек, то есть равно 2^n. Итак, *в n-элементном множестве имеется 2^n различных подмножеств.*

Это утверждение поможет нам в решении следующей задачи.

Задача 8. *Сколькими способами можно рассадить за пятнадцатью партами 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы каждый мальчик сидел за одной партой с девочкой?*

Вспоминая решенную ранее задачу, мы на первом шаге рассадим учеников так, чтобы за каждой партой мальчик сидел слева, а девочка — справа, а на втором шаге выберем множество парт, на которых мальчик и девочка поменяются местами. На первом шаге у нас $(15!)^2$ возможностей, на втором 2^{15} возможностей. По правилу произведения получим ответ: $(15!)^2 \cdot 2^{15}$.

Упражнение 12. Сколькими способами можно 9 различных монет разложить в два кармана?

Наша обложка

Магические восьмиугольники

На четвертой странице обложки изображены 25 «магических восьмиугольников». В узлах каждого из них записаны четыре «синих» и четыре «зеленых» числа, в центре записано «красное» число (все числа — между 1 и 25).

Если красное число сложить с четырьмя синими (или зелеными) числами «своего» восьмиугольника, мы получим магическую сумму 65. Возьмем, для примера, восьмиугольник с числом 13 в центре: $13+(19+5+7+21)=13+(10+22+16+4)=65$. (Любопытно, что здесь магическую сумму составляют и два соседних числа, сложенные с диаметрально противоположными: $13+(22+5)+(4+21)=13+(5+16)+(21+10)=13+(16+7)+(10+19)=13+(7+4)+(19+22)=65$. Тем же свойством обладают и некоторые другие восьмиугольники, например в левом верхнем углу.

Интересно, что продлевая синие и зеленые «кресты» с центром в красном числе 13 и складывая получающиеся на концах числа с числом 13, мы снова получим число 65 в сумме: $13+(20+6+24+2)=13+(13+13+13+13)=13+(6+20+2+24)=13+(4+22+16+10)=13+(1+25+17+9)=...=65$. (Аналогичным свойством обладают некоторые другие красные центры).

А внутри черной рамки получился самый настоящий «магический квадрат» размером 5×5 (суммы чисел по каждой строке, по каждому столбцу и двум главным диагоналям одинаковы и равны 65):

1	12	20	23	9
8	19	22	5	11
24	10	13	16	2
15	21	4	7	18
17	3	6	14	25

Проверьте, что магический квадрат образуют так же и красные числа.

Возьмем теперь, начиная с верхнего ряда, зеленые числа:

15	7	4	21	18
17	14	6	3	25
24	16	13	10	2
1	23	20	12	9
8	5	22	19	11

Снова получился магический квадрат с суммой 65.

Оставшиеся зеленые числа:

23	9	20	1	12
7	18	4	15	21
16	2	13	24	10
5	11	22	8	19
14	25	6	17	3

снова образуют магический квадрат. То же самое верно и для синих чисел.

Итак, мы нашли один красный квадрат, один разноцветный (в рамке), два зеленых и один синий... Еще один синий квадрат найдите сами.

Е. Кривошеев

Л. Асламазов

Силы трения и движение

Движению тела обычно препятствуют силы трения. Если соприкасаются поверхности твердых тел, их относительному движению мешают силы сухого трения. Характерной особенностью сухого трения является существование зоны застоя. Тело нельзя сдвинуть с места, пока абсолютная величина внешней силы не превысит определенного значения. До этого момента между поверхностями соприкасающихся тел действует сила трения покоя, которая уравновешивает внешнюю силу и растет вместе с ней (рис. 1). Максимальное значение силы трения покоя определяется формулой

$$|\vec{F}_{\text{тр max}}| = \mu|\vec{N}|,$$

где μ — коэффициент трения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей; $\vec{N}$ — сила нормального давления.

Когда абсолютная величина внешней силы превышает значение $|\vec{F}_{\text{тр max}}|$, возникает относительное движение — проскальзывание. Сила трения скольжения обычно слабо зависит от скорости относительного движения, и при малых скоростях ее можно считать равной $|\vec{F}_{\text{тр max}}|$.

Движению тела в жидкости и газе препятствуют силы жидкого трения. Главное отличие жидкого трения от сухого — отсутствие зоны застоя. В жидкости или газе не возникают силы трения покоя, и поэтому даже малая внешняя сила способна вызвать движение тела. Сила жидкого трения при малых скоростях пропорциональна скорости, а при больших — квадрату скорости движения.

Задача 1. *При экстренной остановке поезда, двигающегося со скоростью $|\vec{v}| = 70$ км/ч, тормозной путь составил $s = 100$ м. Чему равен коэффициент трения между колесами поезда и рельсами? Каким станет тормозной путь, если откажут тормоза в одном из $n = 10$ вагонов? Массу локомотива принять равной массе вагона; силами сопротивления воздуха пренебречь.*

При торможении ускорение $\vec{a}$ поезду сообщает сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$:

$$M\vec{a} = \vec{F}_{\text{тр}},$$

где M — масса всего состава. Сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ представляет собой равнодействующую всех сил трения, действующих на состав (рис. 2), и равна по модулю $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu|\vec{N}| = \mu Mg$. Следовательно,

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}_{\text{тр}}|}{M} = \mu g \quad \text{и} \quad \mu = \frac{|\vec{a}|}{g}.$$

С другой стороны, $|\vec{a}| = |\vec{v}|^2/2s$. Подставляя это значение в выражение

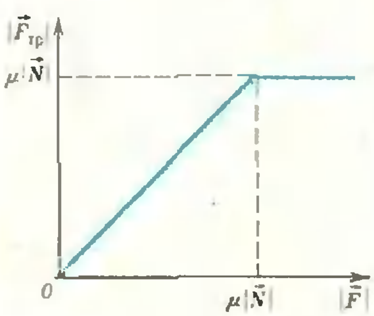


Рис. 1.

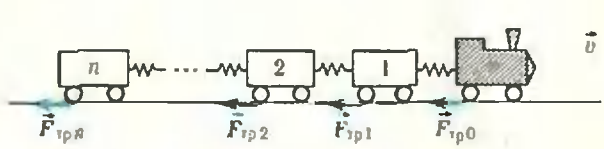


Рис. 2.

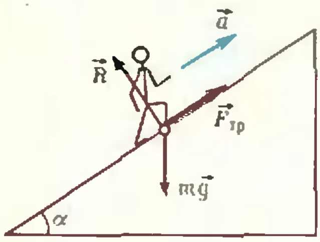


Рис. 3.

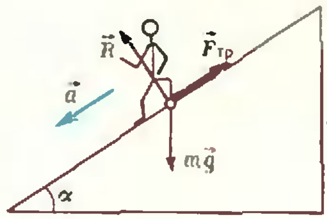


Рис. 4.

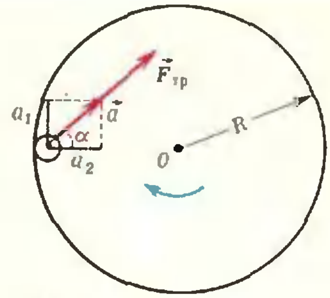


Рис. 5.

для μ, получаем

$$\mu = \frac{|\vec{v}|^2}{2gs} \approx 0{,}2.$$

В том случае, когда не работают тормоза у одного из вагонов, суммарная сила трения, действующая на вагоны и локомотив, равна

$$|\vec{F}'_{тр}| = \mu nmg,$$

где m — масса одного вагона. Масса всего состава равна $M=(n+1)m$, так что $m=M/(n+1)$. Ускорение поезда в этом случае равно

$$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{F}'_{тр}|}{M} = \frac{n}{n+1}\mu g,$$

а тормозной путь равен

$$s' = \frac{|\vec{v}|^2}{2|\vec{a}'|} = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{|\vec{v}|2}{2\mu g} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)s = 110 \text{ м}.$$

***

Важно понимать, что сила трения не всегда тормозит движение. Во многих случаях движение становится возможным именно благодаря ей.

Смогли бы вы разбежаться на скользком льду? Очевидно, нет; в лучшем случае вам удалось бы бежать на месте. Сила трения между подошвами и землей, препятствуя проскальзыванию, создает необходимое для разгона ускорение.

Задача 2. *При каком коэффициенте трения человек сможет вбежать на горку высотой $h=10$ м с углом наклона $\alpha=0{,}1$ рад за время $t=10$ с без предварительного разгона? Считать, что мощность человека не ограничивает время движения, а сопротивление воздуха мало.*

Сила трения, действующая на человека, препятствует проскальзыванию и поэтому направлена вверх (рис. 3). На человека также действуют сила притяжения к Земле $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{R}$. Величина последней силы определяется из условия равенства нулю суммы проекций всех сил на направление, перпендикулярное плоскости горки (в этом направлении нет ускорения):

$$mg\cos\alpha - |\vec{R}| = 0.$$

Как видно, сила реакции $|\vec{R}| = mg\cos\alpha$, а значит и равная ей по модулю сила нормального давления $\vec{N}$, меньше силы тяжести.

Напишем теперь второй закон Ньютона, спроектировав все силы на направление вдоль плоскости горки:

$$m|\vec{a}| = \mu mg\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

С другой стороны, ускорение связано со временем движения и пройденным путем кинематической формулой

$$l = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{a}|t^2}{2}.$$

Из последних двух уравнений для коэффициента трения получаем

$$\mu = \frac{(2h/gt^2) + \sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} \approx 0{,}3.$$

* * *

Если человек не вбегает на горку, а сбегает с нее, то сила трения, препятствуя скольжению, может тормозить его движение. Именно благодаря силе трения человеку удается медленно спускаться с горки.

Задача 3. *Какую минимальную скорость будет иметь человек, сбежавший с горки высотой $h=10$ м с наклоном $\alpha=0{,}1$ рад при коэффициенте трения $\mu=0{,}05$?*

Проектируя силы, действующие на человека, на направление плоскости горки (рис. 4), для модуля ускорения получаем

$$|\vec{a}| = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha.$$

Конечная скорость человека

$$|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{a}|l} = \sqrt{2|\vec{a}|h/\sin \alpha} = \sqrt{2gh(1-\mu \operatorname{ctg} \alpha)} \approx 10 \text{ м/с}.$$

При $\mu \geqslant \operatorname{tg} \alpha$ человек может стоять на горке и, следовательно, может спускаться с нее как угодно медленно.

Разумеется, все сказанное относится не только к человеку, но и к автомашине. Сила трения между шинами и шоссе, препятствуя проскальзыванию, разгоняет автомобиль, когда колеса соединены с двигателем. Эта же сила, также препятствуя проскальзыванию, тормозит движение автомобиля, когда к колесам прижаты тормозные колодки.

***

Рассмотрим теперь роль силы трения при движении по окружности.

Задача 4. *У края диска радиусом R лежит монета (рис. 5). Диск раскручивается так, что его угловая скорость линейно растет со временем: $\omega = \varepsilon t$. В какой момент времени монета слетит с диска, если коэффициент трения между диском и монетой μ? Какой угол с направлением к центру диска образует сила трения в этот момент?*

До тех пор пока монета лежит на диске, ее линейная скорость v равна линейной скорости диска:

$$v = \omega R = \varepsilon R t.$$

Как видно, эта скорость не постоянна, а линейно растет со временем. Следовательно, монета движется с ускорением, проекция которого на направление касательной к окружности равна $a_1 = \varepsilon R$. Кроме того, поскольку монета движется по окружности, у нее есть и центростремительное ускорение (то есть проекция ускорения на направление к центру окружности) $a_2 = v^2/R = \varepsilon^2 R t^2$. Таким образом, ускорение монеты равно по модулю (см. рис. 5)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \varepsilon R \sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}.$$

Единственной силой, действующей на монету в плоскости диска, является сила трения $\vec{F}_{тр}$. По второму закону Ньютона она и создает ускорение $\vec{a}$:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тр} \text{ и } m|\vec{a}| = |\vec{F}_{тр}|.$$

Подставляя в последнюю формулу выражения для $|\vec{a}|$ и для максимального значения силы трения $|\vec{F}_{тр}| = \mu m g$, получаем, что монета может лежать на плоскости до момента

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1 \right)^{1/4}.$$

При $\varepsilon > \mu g/R$ монета слетит сразу же, так как сила трения будет не в состоянии обеспечить столь большое ускорение монеты.

Направление силы трения совпадает с направлением ускорения, поэтому

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\varepsilon R}{\varepsilon^2 R t^2} = \left(\frac{\mu^2 g^2}{\varepsilon^2 R^2} - 1 \right)^{1/4}.$$

***

Многие задачи на силы трения удобно решать, применяя закон сохранения энергии.

Задача 5. *Тело, скользящее со скоростью $\vec{v}$ по гладкой поверхности, влетает на шероховатую поверхность с коэффициентом трения μ (рис. 6). При какой минимальной длине тела l оно остановится так, что часть его еще будет находиться на гладкой поверхности?*

Из закона сохранения энергии следует, что начальная кинетическая энергия тела равна работе, совершаемой против сил трения:

$$\frac{mv^2}{2} = A_{тр}.$$

При нахождении работы необходимо учесть, что сила трения меняется по мере перемещения тела с гладкой поверхности на шероховатую. Если на шероховатой поверхности находится часть тела длиной x,

$$|\vec{F}_{тр}| = \frac{\mu m g}{l} x,$$

то есть сила трения пропорциональна пройденному пути. Поэтому при

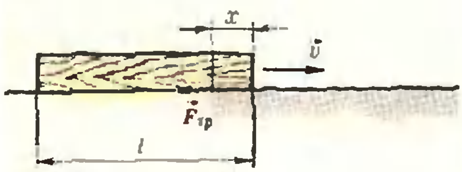


Рис. 6.

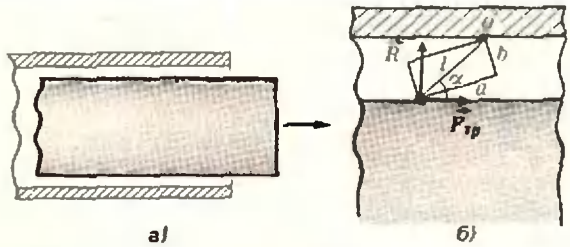


Рис. 7.

перемещении всего тела работа

$$A_{тр}=\int_0^l|\vec{F}_{тр}|\,dx=\frac{\mu mg}{l}\int_0^l x\,dx=\frac{\mu mgl}{2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение, выражающее закон сохранения энергии, для минимальной длины тела получаем

$$l=|\vec{v}|^2/\mu g.$$

***

В заключение рассмотрим довольно часто встречающееся явление — заклинивание: в некоторых случаях невозможно преодолеть силу трения, даже прикладывая очень большую внешнюю силу.

З а д а ч а 6. *Стержень вытаскивают из трубы, имеющей диаметр, несколько больший диаметра стержня (рис. 7, а). В зазор между стержнем и трубой попадает песчинка, имеющая форму параллелепипеда (отношение $a/b=0,1$). Оцените, при каком значении коэффициента трения между песчинкой и поверхностями стержня и трубы стержень не удастся вытащить из трубы. Считать, что коэффициент трения между трубой и стержнем пренебрежимо мал.*

При движении стержня между ним и песчинкой возникает сила трения $\vec{F}_{тр}$. Эта сила, действуя на песчинку, создает момент, вращающий ее вокруг точки O (рис. 7, б). Если этот момент больше момента силы реакции $\vec{R}$, вращающего песчинку в обратную сторону, вытащить стержень не удастся, так как песчинка будет вдавливаться в стержень. Другими словами, если

$$|\vec{F}_{тр}|\,l\sin\alpha>|\vec{R}|\,l\cos\alpha,$$

стержень заклинит.

Подставляя в это неравенство выражение для максимальной силы трения $|\vec{F}_{тр}|=\mu|\vec{N}|$ и учитывая, что сила реакции равна по модулю силе нормального давления: $|\vec{R}|=|\vec{N}|$, получаем, что при $\mu>\operatorname{ctg}\alpha$ стержень вытащить не удастся. В нашем случае $\operatorname{ctg}\alpha\approx a/b=0,1$, так что при $\mu>0,1$ силу трения не удастся преодолеть даже очень большой внешней силой.

Упражнения

1. На наклонной плоскости лежит тело массой m. Найдите модуль $F_{тр}$ силы трения, действующей на тело, в зависимости от угла наклона α и постройте соответствующий график. Коэффициент трения между телом и плоскостью μ.

2. Человек идет по скользкому льду. Оцените, какого максимального размера L шаги он может делать, чтобы не упасть. Длина ноги человека $l=1$ м, коэффициент трения о лед $\mu=0,05$.

3. На листе бумаги лежит монета массой m. С каким максимальным ускорением можно тянуть лист бумаги, чтобы монета с него не соскользнула, если коэффициент трения монеты о бумагу μ? Как при этом направлена сила трения, действующая на монету?

4. Нажимая на педаль «газ», водитель увеличивает мощность, развиваемую двигателем автомобиля. При какой мощности начнется пробуксовка колес автомобиля, если коэффициент трения между шинами и дорогой $\mu=0,2$, масса автомобиля $m=1000$ кг, скорость $|\vec{v}|=60$ км/ч, КПД двигателя $\eta=40\%$?

5. Водитель автомобиля внезапно увидел перед собой стену, преграждающую дорогу. Что выгоднее ему делать: затормозить или свернуть в сторону?

6. На наклонной плоскости лежит брусок. Как он будет двигаться, если ему сообщить горизонтальный импульс, параллельный ребру наклонной плоскости?

Заочная школа программирования

Урок 11: обработка текстов на ЭВМ

Дело состояло только в том, чтобы переменить заглавный титул да переменить кое-где глаголы из первого лица в третье.

Н. В. Гоголь. «Шинель»

Где применяется обработка текстов?

Текстовая обработка широко распространена сегодня в различных областях применения ЭВМ. Например, большинство задач, возникающих при автоматизированной подготовке к печати книг, журналов, газет и других изданий, связано с обработкой текстов. К обработке текстовой информации можно свести многие задачи из техники, химии, биологии и других дисциплин. В частности, анализ первичной структуры белков в системе «Бельчонок», о которой рассказывалось в «Кванте» № 12 за 1979 год, проводился средствами текстовой обработки.

Любую более или менее длинную последовательность, состоящую из сравнительно небольшого числа различных элементов, можно записать в памяти ЭВМ в виде текста, обозначив каждый элемент отдельной буквой. Поэтому и технологическая цепочка изготовления детали, и первичная структура сложной молекулы, и порядок действий водителя при трогании автомобиля с места — все эти и многие другие последовательности будут с точки зрения ЭВМ текстами. Программу на любом языке машина тоже рассматривает как текст, который необходимо обработать, чтобы перевести на язык машинных команд и исполнить.

З а д а н и е 11.1. *Структура поезда дальнего следования записана в виде такого текста:*

'ЛБОПКРМКСКПМРКПКП'—>ПОЕЗД;

Использованы следующие обозначения: Л *— локомотив,* Б *— багажный вагон,* О *— общий,* К *— купированный,* П *— плацкартный,* М *— мягкий,* С *— спальный,* Р *— вагон-ресторан. Перечислите вагоны, через которые нужно пройти, чтобы из вагона* 11 *попасть в вагон* 4. *Нумерация вагонов начинается с головы поезда, багажный вагон и вагоны-рестораны номеров не имеют.*

З а д а н и е 11.2. *Для изготовления детали необходимо отштамповать заготовку, обточить и отшлифовать рабочую поверхность, подрезать оба торца, просверлить три отверстия, в одном из них нарезать резьбу и нанести защитное покрытие. Придумайте для технологической инструкции способ кодировки и запишите ее в виде текста.*

З а д а н и е 11.3. *Юные биологи придумали такую систему для записи своих наблюдений за поведением животных в естественных условиях: буквой* С *обозначается сон животного,* О *— охота,* К *— кормление,* В *— водопой,* Д *— драка,* И *— игра,* У *— уход за детенышами. Опишите словами поведение животного, представленное таким текстом:*

'ОВОКСВДКИКС'—>ЗВЕРЕК;

Как вы думаете, за каким животным наблюдали ребята: хищное оно или травоядное, молодое или старое?

Простые формы обработки текстов

Одна из простейших форм обработки текстов — подсчет количества определенных букв или сочетаний букв (задачи 4а и 4б Олимпиады по программированию — «Квант», 1980, № 3). При подготовке печатных изданий и документов такая задача встречается сравнительно редко, а вот при решении задач из других областей — очень часто. Например, таким способом можно определить процентное содержание валина в белке, подсчитать количество сверлений при обработке детали или число случаев, когда животное засыпало сразу после еды.

Опишем функцию СЧЕТ1 с двумя параметрами — БУКВА и ТЕКСТ, которая будет подсчитывать, сколько раз заданная буква встречается в тексте:

```
ПРОЦ СЧЕТ1 БУКВА ТЕКСТ=>СЧЕТЧИК:
  0—>СЧЕТЧИК; 1—>НОМЕР;
  ПОКА НОМЕР=<(≠ТЕКСТ)::
    ЕСЛИ ТЕКСТ[НОМЕР]=БУКВА
    ТО СЧЕТЧИК+1—>СЧЕТЧИК
    ВСЕ;
    НОМЕР+1—>НОМЕР;
  ВСЕ
КНЦ;
```

Проверьте, что значение функции СЧЕТ1('К', ПОЕЗД) будет равно 5.

З а д а н и е 11.4. *Описать функцию* СЧЕТ2(ОТРЕЗОК,ТЕКСТ), *подсчитывающую количество заданных отрезков последовательностей букв в тексте. Например, значение функции* СЧЕТ2('КУ','КУКАРЕКУ') *равно 2.*

Часто приходится решать еще и такую задачу: построить сводную таблицу количества повторений каждой буквы, встречающейся в тексте. Такую таблицу удобно представить как множество, состоящее из кортежей вида <БУКВА, ЧИСЛО ПОВТОРЕНИЙ>.

Например, для текста «КУКАРЕКУ» таблица могла бы иметь такой вид: <•<'К',3>, <'У',2>, <'А',1>, <'Р',1>, <'Е',1>•>.

Понятно, что для построения таблицы нужно просмотреть весь текст и для каждой его буквы проверить, найдется ли в составляемой таблице кортеж, первым элементом которого является эта буква. Если такой кортеж есть, то нужно прибавить единицу к его второму элементу, а если нет — нужно добавить к таблице новый кортеж, первый элемент которого — это встретившаяся буква, а второй — единица. Соответствующая процедура может выглядеть так:

```
ПРОЦ ТАБЛИЦА ТЕКСТ=>МНОЖ:
  <••>—>МНОЖ; 1—>НОМЕР;
  ПОКА НОМЕР=<(≠ТЕКСТ)::
    ТЕКСТ[НОМЕР]—>БУКВА;
    0—>КОНТРОЛЬ;
    ДЛЯ КОРТЕЖ ИЗ МНОЖ::
ЕСЛИ КОРТЕЖ[1]=БУКВА ТО
КОРТЕЖ[2]+1—>КОРТЕЖ[2];
      1—>КОНТРОЛЬ
      ВСЕ
    ВСЕ;
    ЕСЛИ КОНТРОЛЬ=0 ТО
    МНОЖ+<БУКВА,1>—>МНОЖ
    ВСЕ
  ВСЕ
КНЦ;
```

Обратите внимание на имя КОНТРОЛЬ! Его пришлось ввести для того, чтобы проверить, был ли среди элементов множества МНОЖ нужный кортеж. Отпечатать такую таблицу в удобном виде можно, например, так:

```
ДЛЯ КОРТЕЖ ИЗ МНОЖ::
  ПЕЧАТЬ('БУКВА',КОРТЕЖ[1],
  'ВСТРЕЧАЕТСЯ',КОРТЕЖ[2]'РАЗ')
ВСЕ;
```

Редактирование

Пожалуй, самые интересные текстовые задачи возникают при обработке «настоящих» текстов: печатных изданий, документов, программ на различных языках программирования и т. д. Применение ЭВМ позволяет легко и быстро редактировать такие тексты, вносить в них любые исправления и изменения, печатать в любом формате, а иногда и любым шрифтом (в одной из статей мы расскажем подробнее о подготовке печатных изданий на ЭВМ).

Типичный пример задачи редактирования — задача 4в Олимпиады: «Всюду в тексте с именем ПРИКАЗ заменить слова 'КАПИТАН ИВАНОВ' на 'МАЙОР ИВАНОВ'». Большинство участников Олимпиады неплохо справились с этой задачей, но почти никто не обратил внимания на одну тонкость: отыскивая места, где нужно произвести замену, надо было искать отрезок 'КАПИТАН ИВАНОВ ' (с пробелом после фамилии!), а не просто 'КАПИТАН ИВАНОВ', иначе, например, капитан Ивановский, если его фамилия встречается в приказе, тоже окажется майором.

Задача замены слов в тексте с учетом различных грамматических форм (в нашем примере слова «КАПИТАН ИВАНОВ» могли стоять в разных падежах) программируется значительно сложнее. Впрочем, гоголевский Акакий Акакиевич с этой задачей, как известно, тоже не справился. Такого рода редактирование сложных текстов удобно проводить в режиме диалога, когда человек-оператор просматривает текст и отыскивает места, где необходимо выполнить текстовые замены (иногда такой поиск может проходить с «подсказкой» со стороны машины), а сами замены выполняет ЭВМ.

Для работы в таком режиме удобно заранее описать процедуры для выполнения самых распространенных операций (поиск нужного отрезка текста, замена, исключение, вставка, вывод на терминал и т. д.), а затем использовать эти процедуры в качестве директив в ходе диалога.

З а д а н и е 11.5. *Описать процедуру* ЗАМЕНА(ТЕКСТ,СТАР,НОВ), *которая всюду в тексте с именем* ТЕКСТ *заменит определенные сочетания символов заданным отрезком текста. Второй параметр этой процедуры — заменяемый отрезок текста, а третий параметр — заменяющий отрезок.*

У к а з а н и е. Если длины старого и нового отрезков текста не совпадают, для правильной замены нужно использовать конкатенацию строк. Например, если слово «КРОНДИЛ», расположенное в тексте с именем БАРМАЛЕЙ, начиная со 128-й позиции, необходимо исправить на «КРОКОДИЛ», то это можно выполнить так:

```
БАРМАЛЕЙ[1:130] + 'КО'
+БАРМАЛЕЙ[132:(≠БАРМАЛЕЙ)]
—>БАРМАЛЕЙ;
```

Если вместо этого попробовать использовать простое присваивание, то исправить ошибку не удастся: после присваивания

```
'КО'—>БАРМАЛЕЙ[131:131];
```

получится «КРОКДИЛ».

Процедура ЗАМЕНА позволяет исправлять ошибки и вносить изменения в текст. Но использовать ее нужно осторожно, чтобы не возникало новых ошибок. Рассмотрим простой пример. Пусть в тексте с именем УЧЕБНИК нужно было напечатать формулу:

SIN (X)+COS (X)=S;

Просматривая этот текст на экране терминала, оператор заметил ошибку. Строка выглядела так:

SIN (S)+COS (X)=S;

Оператор попробовал ее исправить и набрал такую директиву:

ЗАМЕНА(УЧЕБНИК,'S','X');

Вторично просматривая это же место, он с удивлением обнаружил, что формула приобрела совсем уж странный вид:

XIN (X)+COS (X)=X.

Причина ясна: все буквы «S» в УЧЕБНИКе (и не только в этой строке!) заменились на «X».

З а д а н и е 11.6. *Записать правильную директиву* ЗАМЕНА *для исправления первоначального варианта этой строки (возможным воздействием на другие части текста пренебречь).*

Если целая книга или большая программа записана в память в виде одного длинного текста, то редактировать такой текст не так уж удобно. При каждом исправлении нужно обязательно проверять, что заменяемый или выбрасываемый участок текста не повторяется ни в каком другом месте. Конечно, такую проверку можно поручить машине (используя, например, приведенную выше процедуру СЧЕТ2), но обычно бывает удобнее просто указать точное место исправления. Для этого большой текст разбивают на короткие участки по 50—60 символов — *строки*, а из строк составляют кортеж. Каждая строка целиком видна на экране терминала, поэтому подобрать нужное исправление очень легко: не нужно заботиться о сохранности остального текста. В директиве ЗАМЕНА при таком способе представления текста появляется еще один параметр — номер строки, в которой нужно произвести замену.

* З а д а н и е 11.7. *Составить программу для проверки правильности расстановки скобок в формуле, представленной текстом с именем* ФОРМ. *Скобки считаются расставленными правильно, если между открывающими и закрывающими скобками можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором каждой открывающей скобке соответствует стоящая после нее закрывающая.* (()(())()) — *пример правильной расстановки скобок. А вот примеры неправильной расстановки:*)(,()()),)()(,()()(.

У к а з а н и е. Для решения этой задачи удобно использовать простой прием, называемый *алгоритмом Рутисхаузера*. Присвоим имени СЧЕТЧИК значение 0 и будем просматривать текст ФОРМ слева направо. Обнаружив закрывающую скобку, будем вычитать единицу из значения имени СЧЕТЧИК, а обнаружив открывающую скобку, прибавлять единицу. Если к окончанию просмотра значение имени СЧЕТЧИК положительно, значит, закрывающих скобок не хватает. Если во время просмотра значение этого имени хотя бы один раз стало отрицательным, значит, скобки расставлены неправильно. Если во время просмотра имя не становилось отрицательным и к окончанию равно нулю, значит, все в порядке (докажите!).

Г. Звенигородский

XIV Всесоюзная олимпиада школьников

В. Вавилов, А. Земляков, И. Клумова

Олимпиада по математике

С 16 по 23 апреля в Саратове состоялся заключительный этап XIV Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 158 школьников: 39 восьмиклассников, 60 девятиклассников и 59 десятиклассников. Все эти ребята — победители республиканских олимпиад, а также школьники, получившие дипломы I и II степени на заключительном этапе XIII Всесоюзной олимпиады. Среди участников олимпиады были также команда хозяев олимпиады — школьники Саратова (3 человека) и команда учащихся ПТУ (3 человека) — победитель олимпиады профессионально-технических училищ Ленинграда, выступившая вне конкурса.

В этом году олимпиада была посвящена 110-й годовщине со дня рождения В. И. Ленина. 16 апреля в актовом зале Саратовского дворца пионеров и школьников в торжественной обстановке происходило открытие заключительного этапа олимпиады. Председатель оргкомитета олимпиады, заместитель председателя Саратовского облисполкома И. Ф. Ялынычева поздравила участников заключительного этапа олимпиады с началом соревнований.

Юные математики возложили цветы к памятникам В. И. Ленину и борцам социалистической революции 1917 года и приняли участие во Всесоюзном ленинском коммунистическом субботнике.

Заключительный этап олимпиады происходил, как обычно, в два тура, которые состоялись 18 и 20 апреля.

При отборе задач методическая комиссия руководствовалась следующими принципами: 1) задачи должны охватить большинство разделов школьной программы, пройденных учащимися; 2) задания должны отвечать «различным вкусам», то есть содержать задачи по планиметрии и стереометрии, задачи по алгебре и началам анализа, задачи аналитического типа и задачи «олимпиадного» характера; 3) задания в целом должны быть умеренной сложности так, чтобы каждый участник заключительного этапа решил хотя бы одну задачу и не менее половины участников справились с половиной всего задания.

В каждый из дней школьникам было предложено по четыре задачи, на решение которых отводилось по 5 часов. Ниже мы приводим условия всех задач.

В этом году жюри заранее оценило каждую задачу в баллах. Максимальная сумма баллов в каждом туре равнялась 30. (Число баллов за задачу указано в скобках после условия.) Участникам олимпиады эти априорные оценки заранее не сообщались.

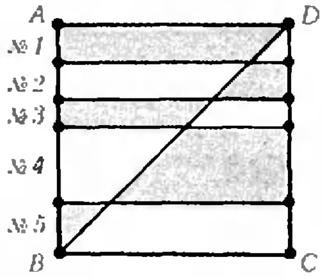
Задачи

Первый день

8 класс

1. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021...7980 на 1980? (6)

2. Сторона AB квадрата $ABCD$ разделена на n отрезков так, что сумма длин от-



резков с четными номерами равна сумме длин отрезков с нечетными номерами (см. рисунок). Через точки деления проведены отрезки, параллельные стороне AD, а затем каждая из получившихся n полосок диагональю BD разбита на две части — левую и правую. Докажите, что сумма площадей левых частей с нечетными номерами равна сумме площадей правых частей с четными номерами (на рисунке эти части закрашены). (6)

3. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза — ровно 18 тонн. Имеются семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз. (9)

4. Точки M и P — середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $|AM|+|AP|=a$. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ меньше, чем $a^2/2$. (9)

9 класс

1. Имеет ли уравнение $x^2+y^3=z^4$ решения в простых числах x, y, z? (6)

2. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей. (8)

3. См. задачу № 3 для 8-го класса. (8)

4. На берегу круглого озера расположено несколько пунктов. Между некоторыми из них установлено теплоходное сообщение. Известно, что два пункта A и B связаны рейсом тогда и только тогда, когда следующие за ними справа по берегу два пункта A' и B' рейсом не связаны. Докажите, что из любого пункта в любой другой пункт можно добраться теплоходом, причем не более чем с двумя пересадками. (8)

10 класс

1. Шестизначное число, записанное шестью отличными от нуля различными цифрами, делится на 37. Докажите, что перестановками цифр этого числа можно получить еще по крайней мере 23 различных числа, делящихся на 37. (6)

2. См. задачу № 2 для 9-го класса. (8)

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x+2\sin(x+y+z)=0, \\ \sin y+3\sin(x+y+z)=0, \\ \sin z+4\sin(x+y+z)=0. \end{cases} \qquad (8)$$

4. См. задачу № 4 для 9-го класса. (8)

Второй день

8 класс

5. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть неколлинеарные. Известно, что сумма любых 1979 из этих векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 данных векторов равна нулевому вектору. (6)

6. Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли натуральное n такое, что $n+S(n)=1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n. (7)

7. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные — в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 клетки содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11 клеток? (7)

8. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей, на следующий день после посещения. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно один день, причем после этого у него один или несколько дней есть иммунитет, то есть он здоров и заболеть в такой день не может (число дней иммунитета у каждого коротышки может быть свое). Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их.

Докажите, что

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится. (10)

9 класс

5. См. задачу № 7 для 8-го класса. (8)

6. Обозначим через $P(n)$ произведение всех цифр натурального числа n. Может ли последовательность (n_k), заданная рекуррентной формулой $n_{k+1}=n_k+P(n_k)$ и своим первым членом $n_1\in\mathbb{N}$, оказаться неограниченной? (8)

7. Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Определите углы треугольника DEC. (7)

8. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны x, y и z сантиметров, причем $x<y<z$. Через $p=4(x+y+z)$, $S=2(xy+yz+zx)$ и $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ обозначены, соответственно, периметр, площадь поверхности и длина диагонали параллелепипеда. Дока-

жите неравенства:

$$x < \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right),$$

$$z > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right). \qquad (7)$$

10 класс

5. Множество M состоит из целых чисел. Его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждое число из множества M, кроме 1, равно сумме двух (возможно, одинаковых) чисел, принадлежащих M. Среди всех таких множеств укажите множество с минимальным числом элементов. (6)

6. Докажите, что существует бесконечно много чисел a, для которых уравнение

$$[x^{\frac{3}{2}}] + [y^{\frac{3}{2}}] = a$$

имеет по крайней мере 1980 решений в натуральных числах x, y. (Через $[z]$ обозначена целая часть числа z.) (6)

7. В тетраэдре $ABCD$ $(AC) \perp (BC)$ и $(DA) \perp (BD)$. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше, чем $|CD|/|AB|$. (8)

8. Число $x \in [0; 1]$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу x_1. Переставив в десятичной записи числа x_1 цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа x_2. Вообще, десятичная запись числа x_{k+1} получается перестановкой в записи числа x_k цифр с $(k+1)$-й по $(k+5)$-ю после запятой.

а) Докажите, что, как бы ни переставлять цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел x_k всегда имеет некоторый предел.

Обозначим этот предел через y.

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса из какого-нибудь рационального числа x получить иррациональное число y.

в) Придумайте такую дробь x, для которой описанный процесс всегда приводил бы к иррациональным числам y, каковы бы ни были перестановки цифр на каждом шаге.

(Считайте, что числа, в десятичной записи которых есть цифра 9, в этой задаче не рассматриваются.) (10)

Как участники соревнования справились с этими задачами, видно из таблицы 1. С каждой задачей (кроме задачи № 3 для 10-го класса) справилось не менее 20% школьников, а с одиннадцатью задачами (задачи №№ 1, 2, 5, 7 для 8-го класса, №№ 1, 4, 5, 7, 8 — для 9-го класса и №№ 4, 5 — для 10-го класса) справилось более 50% участников.

Таблица 1

Номера задач / Класс	Первый день				Второй день			
	1	2	3	4	5	6	7	8
8 класс								
Справились	29	26	9	13	30	17	25	16
Не справились	4	8	25	16	8	0	8	6
9 класс								
Справились	50	15	18	30	42	21	33	46
Не справились	2	15	35	21	2	27	15	13
10 класс								
Справились	27	29	5	35	38	22	20	19
Не справились	12	22	52	19	9	37	35	16

Несколько слов о составе и работе жюри. Возглавлял работу жюри академик А. Н. Колмогоров, ему помогали три заместителя: профессор Саратовского университета А. А. Привалов, профессор Московского физико-технического института Г. Н. Яковлев и старший научный сотрудник Московского государственного университета В. В. Вавилов. В каждом классе было по два куратора (один — из Москвы, другой — из Саратова). Члены жюри провели разбор задач как для руководителей команд, так и для школьников. Перед разбором задач и руководители, и школьники получали решения всех задач, подготовленные методической комиссией. После завершения проверки работ, до заключительного заседания жюри, посвященного распределению дипломов, школьникам были объявлены их результаты в символической форме «+», «±», «∓», «—», а также суммарное количество баллов, набранное каждым участником. Затем желающим были показаны их работы; параллельно шел прием и разбор апелляций специально созданной для этого комиссией.

Саратовцы отнеслись к юным математикам с большой теплотой. В программе олимпиады — встречи с учеными и студентами механико-математического факультета Саратовского университета, посещение Музея-квартиры семьи Ульяновых, экскурсии по городу и многое- многое другое.

В день закрытия олимпиады жюри организовало «математический бой» между командами ФМШ Москвы и Ленинграда. По четырем предыдущим встречам счет был ничейным; на этот раз победила команда ФМШ при МГУ. Интересно, что две из предложенных задач не решила ни одна из команд (на с. 7 мы приводим условия всех задач математического боя).

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 22 апреля в актовом зале Дворца пионеров и школьников.

Участники олимпиады, набравшие не менее 30 баллов, получили дипломы: первой степени — при 57—60 баллах, второй степени — при 40—56 баллах и третьей степени — при 30—39 баллах. Распределение призеров по классам дано в таблице 2. Их имена вы можете найти на с. 59. Кроме 83 призеров еще 40 участников получили похвальные грамоты. Остальные получили дипломы участников олимпиады.

Только одному участнику олимпиады удалось безукоризненно выполнить все требования и получить 60 баллов. Таким оказался ученик девятого класса школы № 103 Ташкента *Моисей Гайсинский*. 59 баллов набрали трое: *Наталья Гринберг* из ФМШ № 145 Киева, *Дмитрий Бураго* из ФМШ № 45 при Ленинградском университете и *Владимир Титенко* из села Пуховичи Минской области. Наталья Гринберг, как сильнейшая из девушек, получила специальный приз — большую красивую куклу.

Многие участники олимпиады этого года — не новички в олимпиадных состязаниях. Набравший на этот раз 58 баллов ученик московской школы № 2 *Александр Разборов* получил диплом первой степени Всесоюзной олимпиады уже третий раз, а в 1979 году с успехом выступал на XXI Международной математической олимпиаде (I премия). Третий раз дипломами победителей были награждены десятиклассники *А. Боричев* из ФМШ № 45 при ЛГУ, *В. Радченко* и *Ю. Ткаченко* из ФМШ № 145 Киева, *А. Попелюхин* из школы № 2 Киева, *А. Балинский* из школы № 11 Львова, *И. Артюшкин* из школы № 16 Пензы, *Я. Канепс* из ФМШ № 1 Риги, *С. Лацис* из школы № 2 Стучки, *Л. Лернер* из школы № 8 Вильнюса.

Таблица 2

Награждены	Дипломы первой степени	Дипломы второй степени	Дипломы третьей степени	Всего	(в %)
8 класс (из 39)	2	9	12	23	59%
9 класс (из 60)	3	14	14	31	52%
10 класс (из 59)	2	12	15	29	46%
В целом (из 158)	7	35	41	83	51%

Редакция журнала «Квант» наградила В. Титенко специальным призом — подшивкой журнала «Квант» за 1979 год с автографами академиков И. К. Кикоина и А. Н. Колмогорова. За успехи на олимпиаде подпиской на журнал «Квант» на 1981 год были награждены восьмиклассники *Владимир Вишняков* (Балаково), *Вячеслав Фрегер* (Вольск), *Роза Куватбекова* (Фрунзе), *Виктория Рудик* (Уральск), *Ирина Шишкевич* (Чарджоу), *Хамдам Яхшимов* (район Шоват Хорезмской обл. Узбекской ССР).

Команда Саратова на XIV Всесоюзной олимпиаде подтвердила пословицу «Дома и стены помогают»: из трех ее участников двое получили дипломы — *Сергей Волосивец* и *Сергей Курчатов*, оба из школы № 13.

22 участника олимпиады были награждены различными спецпризами, учрежденными организациями и предприятиями Саратова.

В заключение саратовцы передали эстафету проведения олимпиады Казахстану. Представитель Министерства просвещения Казах. ССР отметил авторитетность жюри XIV Всесоюзной олимпиады и заверил собравшихся в том, что Алма-Ата постарается развить и продолжить сложившиеся традиции.

Ниже мы приводим решения девяти задач заключительного этапа

Всесоюзной олимпиады школьников по математике, не вошедших в Задачник «Кванта».

8 класс

Задача 4

Разбивая четырехугольник $ABCD$ диагональю AC, убеждаемся, что

$$S_{ABCD}=2S_{AMCP},$$

поэтому достаточно доказать неравенство

$$S_{AMCP}<a^2/4.$$

Пусть K — точка пересечения отрезков AM и BD (рис. 1). Треугольники MCP и MKP имеют общее основание MP и равные высоты (MP — средняя линия треугольника BCD), поэтому их площади равны. Далее, в силу выпуклости четырехугольника $ABCD$, точка K лежит между A и M, поэтому площадь треугольника MKP меньше площади треугольника AMP.
Итак,

$$S_{AMCP}=S_{AMP}+S_{MCP}=$$
$$=S_{AMP}+S_{MKP}<2S_{AMP}.$$

Обозначив $|AM|$ через x, получим $|AP|=a-x$,

$$2S_{AMP}=x(a-x)\cdot\sin\widehat{MAP}.$$

Остается заметить, что $\sin\widehat{MAP}<1$ и

$$x(a-x)=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2<\frac{a^2}{4}.$$

Задача 5

Обозначим через $\vec{a}$ сумму всех 1980 данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_{1980}$. Тогда сумма всех векторов, кроме $\vec{a}_i$, записывается как $\vec{a}-\vec{a}_i$ и, если $\vec{a}_i\neq\vec{0}$, из условия следует, что $\vec{a}-\vec{a}_i=k_i\vec{a}_i$, то есть $\vec{a}=(1+k_i)\vec{a}_i$ для некоторого числа k_i. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $1+k_i\neq 0$, поэтому вектор $\vec{a}_i=\dfrac{1}{1+k_i}\vec{a}$ коллинеарен $\vec{a}$. Очевидно, это противоречит условию, что среди данных векторов есть неколлинеарные. Следовательно, $\vec{a}=\vec{0}$.

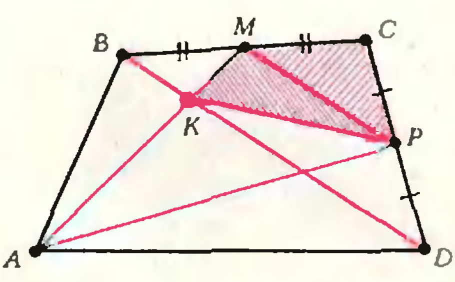


Рис. 1.

9 класс

Задача 1

Данное уравнение решений в простых числах не имеет. Один из способов доказать это состоит в следующем. Допустим противное. Во-первых, хотя бы одно из чисел x, y, z должно быть четным, то есть равняться 2. Во-вторых, рассматривая равенство

$$(3a\pm1)^2+(3b\pm1)^3=(3c\pm1)^4,$$

убеждаемся, что оно невозможно и поэтому хотя бы одно из чисел x, y, z должно делиться на 3, то есть равняться 3. Остается подстановкой убедиться, что тогда третье число не может быть даже целым (рассмотреть 6 случаев).

Другое решение этой задачи может быть основано на разложении исходного уравнения:

$$y^3=z^4-x^2=(z^2-x)(z^2+x),$$

откуда, в случае простого y, получаем две возможности:

$$\begin{cases} z^2-x=1,\\ z^2+x=y^3;\end{cases}\qquad \begin{cases} z^2-x=y,\\ z^2+x=y^2.\end{cases}$$

Одно уравнение в каждой из этих систем снова разлагается, после чего мы быстро приходим к противоречию с простотой чисел x, y, z.

Задача 4

Занумеруем все пункты в порядке их следования по берегу озера: 1, 2, 3, ..., n (за пунктом n следует пункт 1). Из условия вытекает, что из любых двух «соседних пар соседей» $k-1$ и k, k и $k+1$ ровно одна пара связана рейсом, а поэтому связанные рейсами соседние пары пунктов чередуются с несвязанными. Пусть, например, рейсами связаны пункты 1 и 2, 3 и 4, ..., $2k-1$ и $2k$, ... (рис. 2). Очевидно, осталось доказать существование рейса между любыми двумя парами пунктов $2k-1$ и $2k$, $2l-1$ и $2l$, а это сразу следует из условия: либо пункты $2k-1$ и $2l-1$, либо пункты $2k$ и $2l$ соединены рейсом. Утверждение задачи доказано.

Отметим, что наше рассуждение дает ограничение (необходимое условие!) на возможное число пунктов: n четно и $n\geqslant4$.

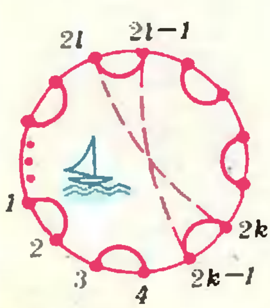


Рис. 2.

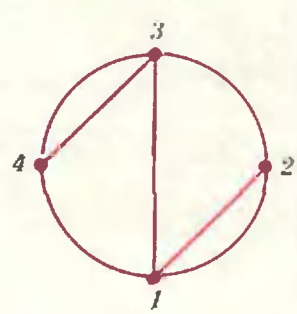


Рис. 3

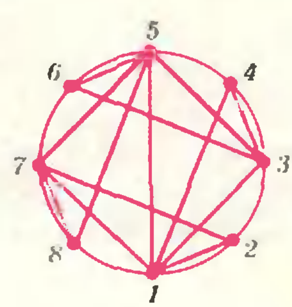


Рис. 4.

Интересно, что нужная система рейсов при $n=6$ не существует; с другой стороны, на рисунках 3, 4 показаны такие системы для $n=4$ и 8. Выяснить, при каких n возможна система рейсов с указанными в задаче свойствами — хорошая тема для исследования. (Ответ: $n=4k$. Конечно, от участников олимпиады этого не требовалось.)

Задача 6

Докажем, что последовательность (n_k) всегда является ограниченной. В самом деле, $n_k < n_{k+1} < n_k + 9^{c(n_k)}$ при всех k, где через $c(n_k)$ обозначено число цифр числа n_k. Допустим, что при каком-то выборе n_1 последовательность (n_k) не ограничена. Выберем натуральное число N так, чтобы выполнялись два условия: $10^N > n_1$ и $9^N < 10^{N-1}$ (так как 10^N неограниченно возрастает, а $(9/10)^N$ стремится к 0 при $N \to \infty$, такой выбор возможен). Из неограниченности (n_k) следует, что, начиная с некоторого номера k, $n_k > 10^N$, поэтому среди чисел $n_k < 10^N$ существует наибольшее — пусть это будет n_p. Но тогда

$$10^N < n_{p+1} < n_p + 9^{c(n_p)} < 10^N + 9^N < 10^N + 10^{N-1},$$

а это означает, что n_{p+1} начинается с цифр 10 и $P(n_{p+1}) = 0$. Следовательно, $n_{p+2} = n_{p+1}$, $n_{p+3} = n_{p+1}$ и вообще $n_k = n_{p+1}$ при всех $k \geqslant p+1$, что противоречит предположению о неограниченности последовательности (n_k).

Заметим, что из приведенных рассуждений следует, что на самом деле при любом выборе n_1 последовательность (n_k) стабилизируется, то есть, начиная с некоторого номера k, n_k не меняется.

Задача 8

Подставив выражения для p, d, S в доказываемые неравенства, после элементарных преобразований получим неравенства $(x-y)(x-z) > 0$ и $(z-x)(z-y) > 0$, которые, очевидно, выполняются, ибо $x < y < z$.

Другой способ решения этой задачи может быть основан на исследовании квадратного трехчлена с корнями

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p \pm \sqrt{d^2 - \frac{1}{2}S}\right).$$

10 класс

Задача 1

Так как число 999 делится на 37, шестизначное число

$$\overline{a_1b_1c_1a_2b_2c_2} = \overline{a_1b_1c_1}\cdot(999+1) + \overline{a_2b_2c_2}$$

делится на 37 тогда и только тогда, когда на 37 делится число

$$\overline{a_1b_1c_1} + \overline{a_2b_2c_2} = (a_1+a_2)100 + (b_1+b_2)10 + (c_1+c_2).$$

Так как цифры a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2 входят в последнее выражение симметричным образом, перестановки цифр внутри этих пар позволяют из данного числа получить еще семь чисел, делящихся на 37.

Далее заметим, что

$$10(100a+10b+c) = 999a + (100b+10c+a),$$

поэтому наряду с $\overline{a_1b_1c_1a_2b_2c_2}$ на 37 делятся также и числа

$$\overline{b_1c_1a_1b_2c_2a_2}, \quad \overline{c_1a_1b_1c_2a_2b_2}.$$

Предыдущие перестановки позволяют из этих чисел получить еще по семь чисел, делящихся на 37. Итого получится $2+3\cdot 7=23$ числа.

Заметим, что для некоторых делящихся на 37 шестизначных чисел перестановками их цифр можно получить более 23 других таких чисел: например, из числа 123 876 можно получить 47 чисел!

Задача 3

Очевидно, $(x;\ y;\ z) = (\pi k;\ \pi l;\ \pi m)$ — решение данной системы при любых целых k, l, m. Докажем, что других решений нет.

Вычитая из суммы первых двух уравнений третье и применяя известные формулы, получим

$$\sin x + \sin y + \sin(x+y+z) - \sin z = 0,$$

$$2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\left(\frac{x+y}{2}+z\right) = 0,$$

$$4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+z}{2}\cos\frac{y+z}{2} = 0.$$

Следовательно, справедливо хотя бы одно из трех соотношений:

1) $\frac{x+y}{2} = \pi n$, 2) $\frac{x+z}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

3) $\frac{y+h}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$,

где n — произвольное целое число.

В первом случае $y = -x + 2\pi n$, $x+y+z = z + 2\pi n$ и после подстановки в первое и последнее уравнения исходной системы получаем

$$\sin x + 2\sin z = 0, \quad \sin z + 4\sin z = 0,$$

откуда

$$\sin z = 0 \text{ и } \sin x = 0;$$

соответствующие решения $(x;\ y;\ z)$ принадлежат к числу указанных.

Второй и третий случай разбираются аналогично.

Задача 6

Предположим противное. Из того, что при любом a данное уравнение имеет конечное число решений, вытекает, что для некоторого числа M при любом a данное уравнение имеет не более чем M решений в натуральных числах. Теперь возьмем произвольное натуральное число N и для каждой из N^2 пар $(x;\ y)$ натуральных чисел, удовлетворяющих условиям $1 \leqslant x \leqslant N$, $1 \leqslant y \leqslant N$, вычислим значение выражения $[x^{3/2}] + [y^{3/2}]$. Согласно предположению, каждое значение при этом получится не более чем M раз, поэтому в результате получится не менее чем N^2/M различных натуральных чисел. Среди них найдется число, не меньшее, чем N^2/M; для некоторой пары $(x_0;\ y_0)$ будет выполнено неравенство

$$[x_0^{3/2}] + [y_0^{3/2}] \geqslant \frac{N^2}{M}.$$

С другой стороны, так как $x_0, y_0 \leq N$,

$$[x_0^{3/2}] + [y_0^{3/2}] < 2N^{3/2}.$$

Таким образом, при любом натуральном N должно быть выполнено неравенство

$$\frac{N^2}{M} < 2N^{3/2},$$

то есть $N < (2M)^2$, что, очевидно, не так. Требуемое доказано.

Заметим, что это доказательство проходит для любого уравнения вида $[x^\alpha] + [y^\alpha] = a$, где $0 < \alpha < 2$. Для значения $\alpha = 3/2$ несколько участников олимпиады дали конструктивное решение этой задачи, указав для бесконечного числа значений a серию из 1980 решений данного уравнения.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

Проходившая в этом году XIV Всесоюзная олимпиада школьников была посвящена 110-летию со дня рождения В. И. Ленина.

С 17 по 22 апреля в Риге проходил заключительный этап олимпиады по физике. В нем приняли участие 147 школьников: 41 восьмиклассник, 49 девятиклассников и 57 десятиклассников. Все они — победители республиканских олимпиад этого года или призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады.

Торжественное открытие заключительного этапа олимпиады состоялось 17 апреля в помещении Дворца пионеров. Министр просвещения ЛатвССР М. Я. Карклинь пожелала школьникам больших успехов в предстоящей олимпийской борьбе и выразила надежду, что активная творческая работа, настойчивость в достижении цели и целеустремленность, с которой ребята готовятся к олимпиадам, помогут им в их дальнейшей жизни.

С приветственным словом к участникам олимпиады обратился ветеран партии, член КПСС с 1917 года, участник Октябрьской революции Г. А. Ясинкевич. Он поделился с ребятами воспоминаниями о встречах с В. И. Лениным, рассказал, какое незабываемое впечатление произвела на него речь Владимира Ильича, обращенная к участникам III Всероссийского съезда комсомола. Г. А. Ясинкевич выразил уверен-

Участники олимпиады по физике, получившие дипломы I степени.
В первом ряду (слева направо) П. Позняков, С. Чичкань, В. Горбунов, Я. Калда, Ю. Лийв, Р. Юшкайтис; в верхнем ряду — А. Пакалнс, П. Родин, Д. Григорьев, Ф. Ратников, М. Семенченко.

ность, что наша молодежь всегда будет достойным продолжателем дел первых комсомольцев, будет стремиться овладевать знаниями, чтобы приносить пользу своей Родине».

Честной увлекательной борьбы и больших успехов пожелал школьникам ректор Латвийского государственного университета им. Петра Стучки профессор В. О. Миллер.

18 апреля состоялся первый тур заключительного этапа олимпиады — теоретический. Восьмиклассникам были предложены 4 задачи (на их решение отводилось 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — 5 задач (на их решение давалось 5 часов). Вот условия этих задач (почти все задачи вошли в Задачник «Кванта» — см. № 7 и 8 за этот год):

Теоретический тур

8 класс

1. Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3:2:1 (рис. 1). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}_0$. Определите скорости вершин A_1, A_2 и B_1 в тот момент, когда все углы конструкции прямые.

2. Небольшая дождевая капля покидает облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли стало равным 5 м/с², ее скорость составляла 7,5 м/с. Вблизи земли капля падает с постоянной скоростью. Попадая на боковое стекло движущегося автомобиля, капля оставляет на ней след под углом 45° к вертикали. Оштрафует ли инспектор ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать прямо пропорциональной скорости капли.

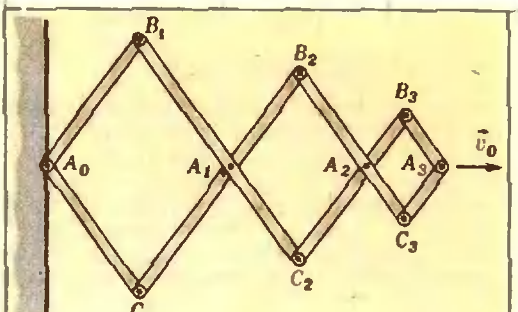
3. В ведре находится смесь воды со льдом. Масса смеси 10 кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости $T(t)$ изображен на рисунке 2. Известны удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг · К) и удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг. Определите, сколько льда было в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь.

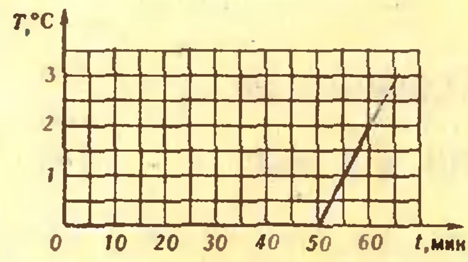
4. Электрическая цепь, состоящая из резисторов R_1, R_2 и R_3, подключена к двум источникам постоянного напряжения U_1 и U_2, как показано на рисунке 3. При каких условиях сила тока через резистор R_1 будет равна нулю?

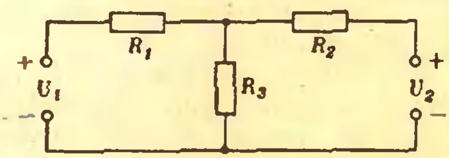
9 класс

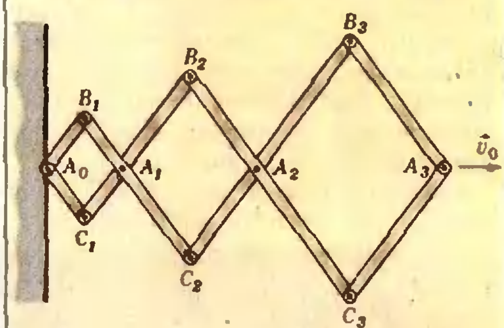
1. Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 1:2:3 (рис. 4). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}_0$. Определите скорости вершин A_1, B_2 и A_2 в тот момент, когда все углы конструкции прямые.

2. Небольшая дождевая капля покидает облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли стало равным 7,5 м/с², ее скорость составляла 20 м/с. Вблизи земли капля падает с постоянной скоростью и, попадая на боковое стекло автомобиля, оставляет на нем след под углом 30° к вертикали. Оштрафует ли инспектор









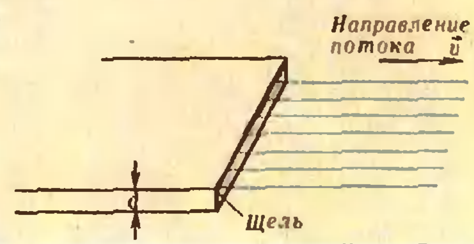
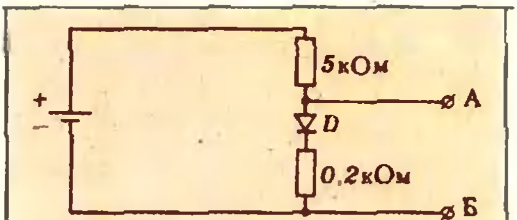
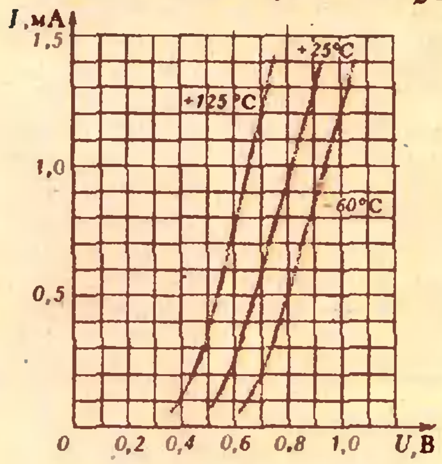
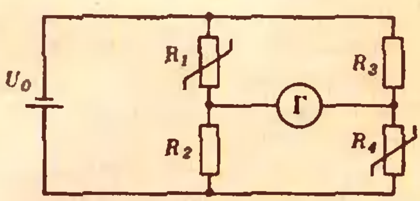


Рис. 1, 2, 3, 4, 5.







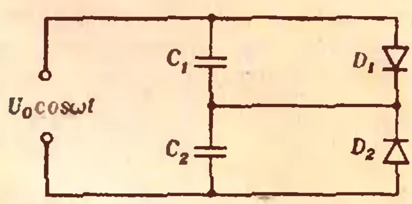


Рис. 6, 7, 8, 9, 10.

ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости капли.

3. В научно-фантастической повести описывается аварийная ситуация, в которой астронавт массой $M = 100$ кг оказался на расстоянии $l = 100$ м от корабля со стаканом замерзшей воды. Обеспечивая сублимацию (испарение) льда, астронавт возвращается на корабль. Реален ли такой способ возвращения? Оцените, за какое время астронавт возвратится на корабль. Считайте, что сублимация льда происходит при постоянной температуре $T = 272$ К. Давление насыщающих паров при этой температуре $p_н = 550$ Па. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К). Размеры стакана и массу льда задайте самостоятельно.

4. Направленный поток электронов вылетает из тонкой широкой щели (рис. 5) со скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}| = 10^6$ м/с). Концентрация электронов в потоке $n = 10^{10}$ м$^{-3}$. На каком расстоянии от щели толщина пучка увеличится в 2 раза? Масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

5. Для получения напряжения, величина которого мало зависит от температуры, собрана схема по рисунку 6. Вольтамперные характеристики диода D при трех различных температурах окружающей среды: $t_1 = 125$°С, $t_2 = 25$°С и $t_3 = -60$°С приведены на рисунке 7. Напряжение источника при температуре 25°С равно $U = 6$ В и с увеличением температуры возрастает на $25 \cdot 10^{-3}$ В/К. Найдите напряжение между зажимами А и Б при $t = 25$°С и зависимость этого напряжения от температуры.

10 класс

1. С южного и северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковыми начальными скоростями, направленными горизонтально. Через время $\tau = 3$ ч 20 мин ракеты оказались на максимальном удалении друг от друга. Определите максимальное расстояние между ракетами. Ускорение свободного падения на Земле считать известным. Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

2. Громкоговоритель имеет диффузор с площадью поперечного сечения $S = 300$ см^2 и массой $m = 5$ г. Резонансная частота диффузора $\nu_0 = 50$ Гц. Какой окажется его резонансная частота, если поместить громкоговоритель на стенке закрытого ящика объемом $V = 40$ л, как показано на рисунке 8? Расчет провести в предположении, что температура воздуха внутри ящика не изменяется при колебаниях диффузора.

3. Схема, изображенная на рисунке 9, состоит из двух одинаковых резисторов $R_2 = R_3 = R$ и двух одинаковых нелинейных резисторов $R_1 = R_4$, вольтамперная характеристика которых имеет вид $U = \alpha I^2$, где α — некоторый известный постоянный коэффициент. При каком напряжении источника питания U_0 сила тока, через гальванометр Г равна нулю?

4. Цепь, состоящая из двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 ($C_2 > C_1$) и двух идеальных диодов D_1 и D_2, подключена к источнику переменного напряжения $u = U_0 \cos \omega t$ (рис. 10). Определите зависимость напряжения на конденсаторах от времени в установившемся режиме. Изобразите полученные зависимости на графике. Сопротивление идеального диода в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечно велико.

5. Правдоподобен ли рассказ о том, что греческие воины по совету Архимеда сожгли деревянный корабль римлян, направив на него солнечные лучи, отраженные от плоских щитов? Принять диаметр щита $D = 1$ м, число воинов $n = 100$, расстояние до корабля $l = 20$ м. Известно, что в солнечную погоду удается зажечь кусок сухого дерева при помощи линзы с фокусным расстоянием $F = 0,1$ м и диаметром $d = 3$ см. Угловой размер Солнца принять равным $\alpha = 0,01$ рад.

По результатам проверки стало ясно, какие задачи вызвали наибольшие затруднения у школьников и какие оказались самыми легкими. Эти сведения приведены в следующей таблице:

	Сложная задача				Легкая задача		
	8 кл.	9 кл.	10 кл.		8 кл.	9 кл.	10 кл.
	№ 1	№ 4	№ 1	№ 4	№ 3	№ 2	№ 3
Число работ с полным решением	9	22	19	20	35	44	46
Число учащихся, не решивших задачу	18	23	31	31	3	2	5

19 апреля состоялся экспериментальный тур олимпиады. Каждому участнику предлагались две экспериментальные задачи. В этом номере журнала помещена статья Т. Романовского с подробным разбором задач экспериментального тура.

Торжественное закрытие XIV Всесоюзной олимпиады школьников по физике состоялось 22 апреля. На нем были объявлены итоги олимпиады. Председатель жюри профессор Латвийского государственного университета И. К. Витолс и заместитель председателя жюри профессор Московского физико-технического института С. М. Козел вручили победителям награды. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 60. Многие участники олимпиады были награждены различными грамотами и призами.

Специальный приз, учрежденный редколлегией и редакцией журнала «Квант», был вручен восьмикласснику *Айнису Мусиню* (Цесис). Подпиской на журнал «Квант» на 1981 год награждены *Вадим Ивлев* (Железногорск), *Андрей Красов* (Узловая), *Юрий Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.), *Юрий Тани* (Славгород Алтайского кр.) и *Павел Цыгвинцев* (Анадырь).

XIV Всесоюзная олимпиада закончилась. Ее участники надолго запомнят эту встречу в гостеприимной столице Латвийской ССР. Хозяева олимпиады — ученые Латвии, Министерство просвещения, Центральный Комитет комсомола республики — сделали очень многое, чтобы обеспечить успешное проведение олимпиады и сделать ее настоящим праздником юных физиков.

Т. Романовский

Экспериментальный тур олимпиды по физике

Задачи экспериментального тура заключительного этапа Всесоюзной олимпиады были разработаны на кафедрах экспериментальной и технической физики Латвийского государственного университета им. Петра Стучки. В этой нелегкой работе активное участие приняли постоянные организаторы республиканских физических олимпиад доценты Я. Гальвиньш, Я. Круминьш, Т. Романовский, В. Флеров и дипломник университета Г. Кокс.

При составлении задач учитывались традиции Всесоюзных олимпиад и республиканских олимпиад Латвийской ССР. Кстати, заметим, что республиканская олимпиада этого года была юбилейной — тридцатой по счету.

Решение задач экспериментального тура проходило в трех вузах: восьмиклассники работали в Рижском политехническом институте, девятиклассники — в Рижском институте инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола и десятиклассники — в Латвийском государственном университете.

Приведем условия этих задач и разберем их решения.

8 класс

1. Определение КПД наклонной плоскости

Задание 1. Предложите метод измерения КПД наклонной плоскости с помощью динамометра и линейки.

Задание 2. Экспериментально изучите зависимость КПД наклонной плоскости от ее высоты и постройте график этой зависимости.

Задание 3. Сравните полученную вами экспериментальную зависимость КПД наклонной плоскости от ее высоты с теоретической.

Дано: наклонная плоскость, брусок, динамометр, измерительная линейка, миллиметровая бумага.

В данной задаче коэффициент полезного действия η определяется по формуле

$$\eta = \frac{mgh}{|\vec{F}|l}.$$

Динамометром измеряют модуль силы $\vec{F}$, с которой надо равномерно тянуть брусок массой m по наклонной плоскости длиной l при различных высотах плоскости h.

Для определения теоретической зависимости КПД от высоты рассмотрим рисунок 1. Для $|\vec{F}|$ и η получаем соответственно

$$|\vec{F}| = mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha),$$

$$\eta = \frac{1}{\mu\operatorname{ctg}\alpha + 1} = \frac{1}{\mu\sqrt{l^2/h^2 - 1} + 1}.$$

Коэффициент трения μ можно найти, измерив $|\vec{F}|$ при $h=0$: $\mu = |\vec{F}|/mg$. На рисунке 2 приведена характерная зависимость коэффициента полезного действия наклонной плоскости от ее высоты ($l = 0{,}5$ м, $\mu = 0{,}3$).

2. Определение плотности жидкости

Определите плотность данной жидкости.

Дано: сосуд с неизвестной жидкостью, сосуд с водой, измерительная линейка, два металлических бруска, рычаг.

Примечание. Плотность воды принять равной $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3.

Надо провести три измерения по установлению равновесия рычага, когда один брусок находится попеременно в воздухе, в воде, в неизвестной жидкости, а другой брусок — все время в воздухе. При этом разумно длину плеча рычага с первым грузом оставлять неизменной, а длину плеча рычага со вторым грузом соответственно изменять. Запишем уравнения моментов сил для трех случаев равновесия рычага (рис. 3):

$$m_1gl = m_2gl_1,$$
$$(m_1g - \varrho_вVg)l = m_2gl_2,$$
$$(m_1g - \varrho Vg)l = m_2gl_3.$$

Исключая из этих уравнений m_1, m_2, V и g, получаем формулу для определения плотности ϱ неизвестной

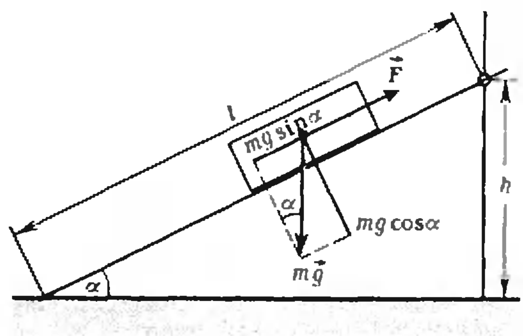


Рис. 1.

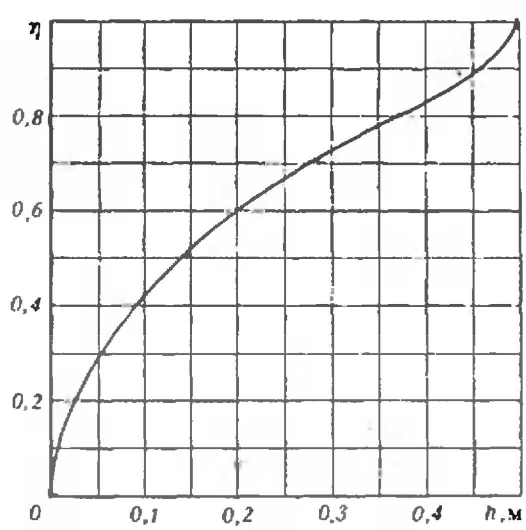


Рис. 2.

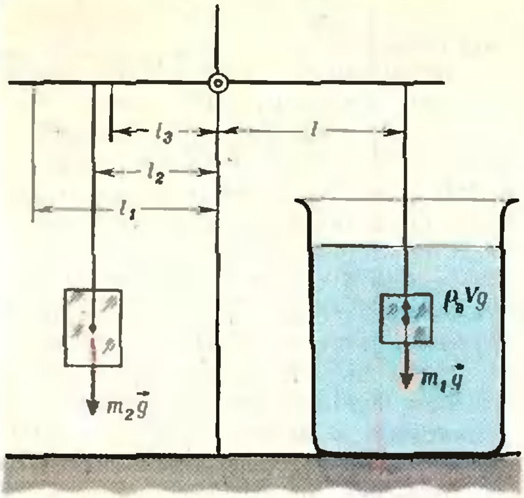


Рис. 3.

жидкости (раствора медного купороса):

$$\rho = \rho_в \frac{l_1 - l_3}{l_1 - l_2}.$$

9 класс

1. Определение коэффициента поверхностного натяжения жидкости

Определите коэффициент поверхностного натяжения данной жидкости, используя жидкость, коэффициент поверхностного натяжения которой известен.

Дано: капилляр, измерительная линейка, рычаг, мензурка, металлический груз, сосуд с жидкостью, коэффициент поверхностного натяжения которой известен, сосуд с жидкостью, коэффициент поверхностного натяжения которой надо определить.

Применяя формулу $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$ для высоты подъема жидкости в капилляре для двух различных жидкостей, получаем выражение для определения коэффициента поверхностного натяжения σ неизвестной жидкости (раствора медного купороса и поваренной соли) через коэффициент поверхностного натяжения $\sigma_н$ известной жидкости (воды):

$$\sigma = \frac{h\rho}{h_н \rho_н} \sigma_н.$$

Здесь h и $h_н$ — высоты подъема неизвестной и известной жидкостей в капилляре. Отношение плотностей можно определить по методу, описанному в задаче 2 для 8-го класса.

2. Исследование «черного ящика»

Задание 1. Исследуйте с помощью источника постоянного тока и двух лампочек накаливания принцип работы «черного ящика».

Задание 2. На основании результатов, полученных в задании 1, нарисуйте качественную вольтамперную характеристику «черного ящика».

Дано: «черный ящик» (из эстетических соображений он покрашен в белый цвет), две лампочки накаливания (6,3 В; 0,3 А), источник постоянного тока (максимальное напряжение 12 В), реостат и провода.

Примечания. 1. Для регулирования напряжения в широких пределах подсоедините реостат потенциометрически к источнику постоянного тока. 2. Во избежание преждевременного «выхода из игры»: а) не подключайте «черный ящик» непосредственно к клеммам регулируемого напряжения; б) не забывайте, что максимальное напряжение источника постоянного тока 12 В, а лампочки, имеющиеся в вашем распоряжении, рассчитаны на номинальное напряжение 6,3 В.

Для решения данной задачи можно составить различные схемы. Одна из наиболее рациональных показана на рисунке 4.

Оказалось, что при различных подключениях «черного ящика» к клеммам 1 и 2 лампочки $Л_1$ и $Л_2$ ведут себя по-разному. При одном включении по мере увеличения тока в цепи накал обеих лампочек сначала

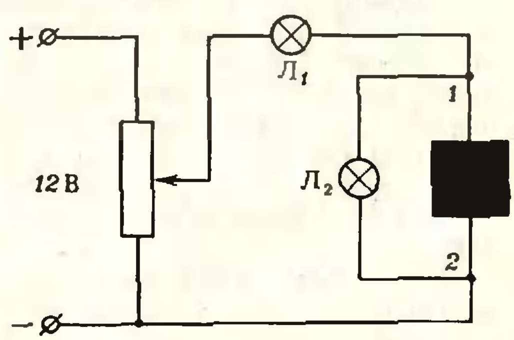


Рис. 4.

увеличивается одинаково: начиная с некоторого положения движка реостата, дальнейшее увеличение тока в цепи увеличивает накал лампочки $Л_1$, а накал лампочки $Л_2$ не меняет. Последнее означает, что при увеличении тока в цепи напряжение на лампочке $Л_2$, а значит и на «черном ящике», не меняется.

При противоположном включении «черного ящика» ток через лампочку $Л_2$ не течет (вернее, почти не течет) даже при очень большом токе в цепи (что можно заметить по яркому свечению лампочки $Л_1$). Следовательно, напряжение между точками *1* и *2* очень мало.

Таким образом, можно сделать вывод, что «черный ящик» стабилизирует напряжение между клеммами *1* и *2*. В первом случае напряжение не превышает некоторого определенного значения (порядка 5,6 В), а во втором случае оно предельно мало. И действительно, в «черный ящик» был помещен стабилитрон (Д815А).

Многие учащиеся, заметив, что «черный ящик» хорошо проводит ток в одном направлении и плохо в другом, быстро сделали вывод о том, что в «черном ящике» находится диод, и не пытались изучить реакцию «черного ящика» при максимально возможном токе.

10 класс

Учебная программа предусматривает знакомство учащихся с генератором звуковой частоты, осциллографом и другими современными физическими приборами. Поэтому для десятиклассников одна задача была составлена с учетом применения таких приборов. Так как конкретный тип осциллографа или генератора звука мог быть и не знаком участникам, они могли получить любую консультацию по приборам.

Опыт последних лет показал, что примерно треть участников олимпиад пользуются личными микрокалькуляторами. Это дает им некоторое преимущество. Чтобы все участники заключительного тура были в равных условиях, на каждом рабочем столе был микрокалькулятор «Электроника» (как это уже четыре года подряд делается на республиканских физических олимпиадах). Каждый мог получить необходимую консультацию, но практически этого не потребовалось. Применение микрокалькулятора на олимпиаде позволяет ставить наряду с качественными интересные количественные задачи.

1. Исследование затухающих колебаний

Задание 1. Изучите работу преобразователя сигнала и установите, как изменяется синусоидальный сигнал, подаваемый на его вход с выхода генератора звуковой частоты.

Задание 2. Определите индуктивность катушки L_x, наблюдая на экране осциллографа затухающие колебания в параллельном колебательном контуре L_xC (рис. 5).

Задание 3. Включите вместо колебательного контура динамический громкоговоритель и получите на экране осциллографа осциллограмму, подобную той, какая получалась в задании 2. Объясните полученный результат.

Дано: генератор звуковой частоты Г, преобразователь сигнала ПС, электронный осциллограф ЭО, параллельный колебательный контур L_xC, динамический громкоговоритель ДГ, микрокалькулятор, провода.

С помощью осциллографа легко было понять, что преобразователь сигнала преобразовывает синусоидальный сигнал в импульсный (рис. 6, *а*). Этими короткими импульсами можно возбуждать свободные колебания в контуре, которые являются затухающими (рис. 6, *б*).

Количество максимумов между задающими импульсами позволяет определить частоту свободных колебаний контура. Тогда по формуле Томсона, зная номинальную емкость конденсатора, можно посчитать индуктивность катушки.

Если вместо колебательного контура включить громкоговоритель, на экране осциллографа опять можно получить картину затухающих колебаний. Правда, для этого надо изменить частоту задающих импульсов, поскольку колебания громкоговори-

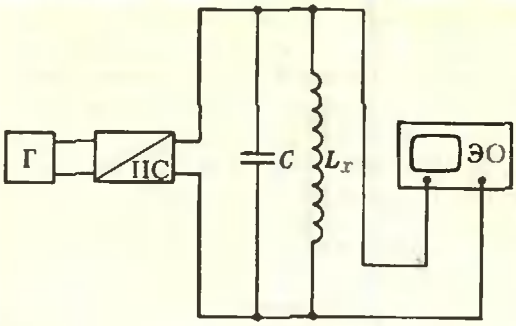


Рис. 5.

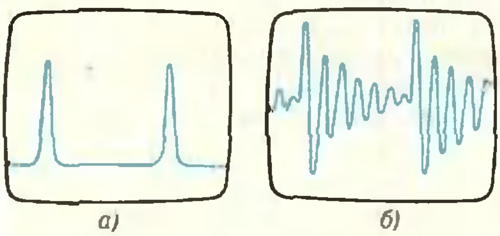


Рис. 6.

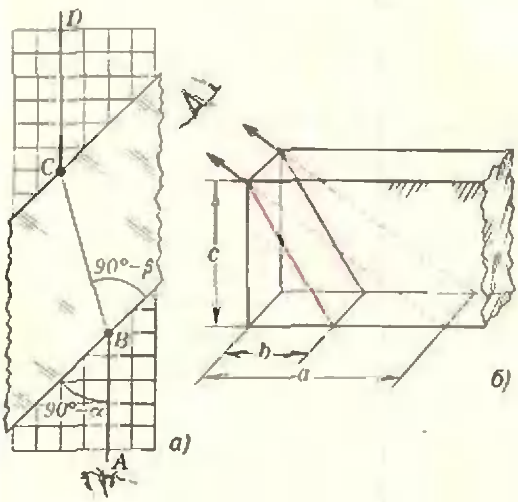


Рис. 7.

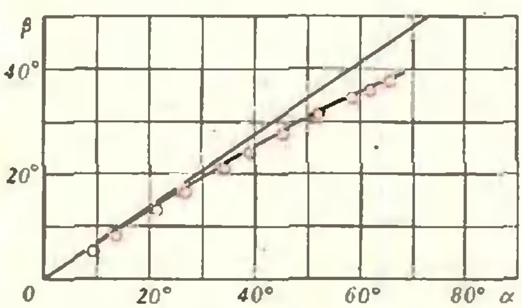


Рис. 8.

теля находятся в другом частотном диапазоне. Заметим, что наблюдаемая картина по своей природе отличается от предыдущей. Диффузор громкоговорителя, колеблясь, индуцирует в катушке громкоговорителя ЭДС, и на экране осциллографа появляется картина затухающих механических колебаний (а не электромагнитных). Многие ошибочно предполагали, что катушка с диффузором образуют колебательный контур.

2. Исследование хода лучей в прозрачной прямоугольной пластинке

Задание 1. Предложите метод (методы) построения хода лучей в прозрачной прямоугольной пластинке и измерения углов преломления β при различных углах падения α, пользуясь только миллиметровой бумагой.

Задание 2. Экспериментально исследуйте и постройте зависимость угла преломления β от угла падения α.

Задание 3. Используя результаты, полученные в задании 2, определите: а) коэффициент преломления материала, из которого изготовлена прозрачная прямоугольная пластинка; б) угол преломления β_0 при угле падения $\alpha_0 = 90°$.

Дано: прозрачная прямоугольная пластинка размером $20 \times 32 \times 100$ мм (плоскости 32×100 мм — матовые), микрокалькулятор, миллиметровая бумага.

Если положить пластинку матовой поверхностью на миллиметровую бумагу, то можно заметить, что продолжением линии AB является линия CD (рис. 7, *а*). Отмечая точки B и C и проекции граней пластинки, строим ход лучей. Этим методом можно добиться высокой точности определения углов падения и преломления. Более экономичным может оказаться метод, когда пластинка положена на миллиметровую бумагу прозрачной гранью. В этом случае углы определяются по формулам (рис. 7, *б*)

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{c} \text{ и } \beta = \operatorname{arctg} \frac{b}{c}.$$

Правильную зависимость между углами падения и преломления, которая является нелинейной (рис. 8), можно получить только в том случае, если измерения проводить в достаточно широком интервале значений углов.

Для точного определения коэффициента преломления надо провести несколько измерений при одном угле падения или по экспериментальным данным построить график $\sin\beta = f(\sin\alpha)$. Согласно теории, эта зависимость должны быть линейной: $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$. Применение графического метода равноценно усреднению. Использование микрокалькулятора позволило обойтись без угломера и провести расчеты за короткое время.

Учитывая, что участникам олимпиады после возвращения домой было бы интересно воспроизвести задачи экспериментального тура в своей школе, организаторы подарили им комплект оборудования (преобразователь сигнала, динамический громкоговоритель, колебательный контур и прозрачную прямоугольную пластинку).

Призеры XIV Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Матюшов С. (Вологда, с. ш. № 29),
Титенко В. (Пуховичи);
по 9 классам —
Бураго Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Гайсинский М. (Ташкент, с. ш. № 103),
Гринберг Н. (Киев, ФМШ № 145);

по 10 классам —
Зайцев Ю. (Видное, с. ш. № 6),
Разборов А. (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Бриталс Я. (Рига, ФМШ № 1),
Кошевец И. (Новороссийск, с. ш. № 40),
Матвеев К. (Новосибирск, с. ш. № 74),
Перельман Г. (Ленинград, с. ш. № 301),
Савкин Я. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Тупайло С. (Киев, ФМШ № 145),
Фрегер В. (Вольск, с. ш. № 12),
Фульман И. (Гомель, с. ш. № 2),
Шевчишин В. (Львов, с. ш. № 11);

по 9 классам —
Алания Л. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Алексеев В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Гогоберидзе Т. (Поти, с. ш. № 4),
Гринчук М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Дерягин Д. (Москва, с. ш. № 2),
Зильберберг А. (Кременчуг, с. ш. № 19),
Крижановский О. (Харьков, с. ш. № 27),
Матвеев А. (Ульяновск, с. ш. № 5),
Минарский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Орел М. (Ленинград, с. ш. № 239),
Рабинович Б. (Тула, с. ш. № 36),
Фомин Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Чанышев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Чеканов Ю. (Москва, с. ш. № 91);

по 10 классам —
Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 18),
Балинский А. (Львов, с. ш. № 11),
Боричев А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Ижболдин О. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Канель А. (Москва, с. ш. № 2),
Каплан А. (Сумгаит, с. ш. № 11),
Кониевич М. (Москва, с. ш. № 91),
Кузьмин Ю. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Курчатов С. (Саратов, с. ш. № 13),
Мегрецкий А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Стадниченко С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Ткаченко Ю. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Буриченко В. (Новокузнецк, с. ш. № 49),
Гринив О. (Киев, ФМШ № 145),
Дьячков А. (Москва, с. ш. № 19),
Кордзая К. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Крупник И. (Кишинев, с. ш. № 40),

Левкин М. (Душанбе, с. ш. № 8),
Николаевский Ю. (Харьков, с. ш. № 131),
Самборский С. (Истра, с. ш. № 1),
Спивак А. (Стерлитамак, с. ш. № 10),
Ходоровский В. (Нововоронежский, с. ш. № 1),
Шарапов С. (Ташкент, с. ш. № 110),
Янгель А. (Нью);

по 9 классам —
Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Барздиньш Г. (Рига, ФМШ № 1),
Белоцерковский Ю. (Минск, с. ш. № 64),
Волосивец С. (Саратов, с. ш. № 13),
Грасманис М. (Рига, ФМШ № 1),
Драмбян Р. (Ереван, ФМШ № 1),
Кагарманов А. (Белорецк, с. ш. № 14),
Маланюк Т. (Киев, ФМШ № 145),
Мелгалвис А. (Рига, ФМШ № 1),
Могилевский Р. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Овчинников П. (Вязники, с. ш. № 11),
Рублев Б. (Киев, ФМШ № 145),
Шварцман В. (Белгород, с. ш. № 9),
Эпиктетов М. (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —
Беспамятных С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Дубровский К. (Славянск, с. ш. № 5),
Канепс Я. (Рига, ФМШ № 1),
Келарев А. (Свердловск, с. ш. № 141),
Колдоркин А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Лацис С. (Стучка, с. ш. № 2),
Лернер Л. (Вильнюс, с. ш. № 8),
Ломазкий Н. (Киев, ФМШ № 145),
Магадеев Б. (Уфа, с. ш. № 114),
Набоков Р. Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Павлющик С. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Попелюхин А. (Киев, с. ш. № 2),
Радченко В. (Киев, ФМШ № 145),
Сивацкий А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Файнгауз Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Калда Я. (Таллин, с. ш. № 1),
Позняков П. (Петрозаводск, с. ш. № 17),
Чичкань С. (Киев, с. ш. № 125);

по 9 классам —
Григорьев Д. (Москва, с. ш. № 57),
Лийв Ю. (Таллин, с. ш. № 1),
Родин П. (Ленинград, с. ш. № 239),
Семенченко М. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —
Горбунов В. (Коммунарск, с. ш. № 22),
Пакалнс А. (Тукумс, с. ш. № 1),
Ратников Ф. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Юшкайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9),

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Алексеев А. (Ленинград, с. ш. № 202),
Бергельсон А. (Москва, с. ш. № 2),
Ким С. (Алмалык, с. ш. № 15),
Коваленко А. (Черкассы, с. ш. № 1),
Николаев В. (Харьков, с. ш. № 5),
Панасюк А. (Одесса, с. ш. № 116),
Сюньков С. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —
Байков П. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Ланев А. (Петрозаводск, с. ш. № 17);

по 10 классам —
Голобоков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Калугин П. (Москва, с. ш. № 444),
Китаев А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Коваленко А. (Львов, с. ш. № 69),
Одинцов А. (Москва, с. ш. № 2),
Пивоваров В. (Красноярск, с. ш. № 10).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Бекметьев Р. (Алма-Ата, РФМШ),
Галаевский В. (Горки Могилевской обл., с. ш. № 4),
Ивлев В. (Железногорск-Илимский, с. ш. № 4),
Мусинь А. (Цесис, с. ш. № 1),
Пироженко А. (Мытищи, с. ш. № 25),
Пронин Д. (Горький, с. ш. № 36),
Цыгвинцев П. (Анадырь, с. ш. № 1);

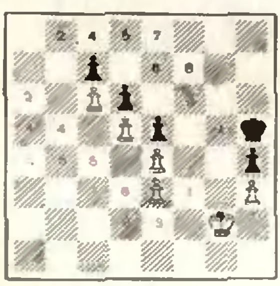
по 9 классам —
Гершанов Ю. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Деревянко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Дмитрук И. (Киев, с. ш. № 145),
Каспаров М. (Баку, с. ш. № 70),
Силаев П. (Москва, с. ш. № 2),
Соловьев В. (Рыбное, с. ш. № 102),
Федюкович В. (Киев, ФМШ при КГУ);

по 10 классам —
Авруцкий И. (Киев, ФМШ при КГУ),
Андрианов А. (Москва, с. ш. № 2),
Власенко С. (Бобруйск, с. ш. № 12),
Геогджаев В. (Долгопрудный, с. ш. № 5),
Козловский В. (Новолукомль, с. ш. № 1),
Кунингас О. (Таллин, с. ш. № 1),
Овсянников Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Скок А. (Талгар, с. ш. № 1).

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Поля соответствия

В прошлом номере мы ознакомились с понятием «оппозиция», играющим важную роль в теории пешечных окончаний. Оппозиция по существу представляет собой частный случай понятия «полей соответствия», возникающего при анализе позиций с блокированной пешечной структурой. При их исследовании применяются различные методы: «критические расстояния Бианкетти», «координатная система Эберса» и др. Теория таких окончаний называется «теорией соответственных полей», потому что в ней при каждом положении одного короля находится «соответственное поле» для другого короля. Это соответствие полей иногда бывает очень сложным, так что анализ каждой конкретной позиции можно рассматривать как решение тонкой математической задачи. Разберем следующую несложную позицию.



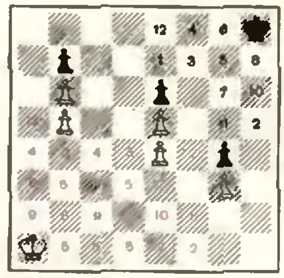
Положение черных нелегкое — белый король грозит прорваться в их лагерь либо через f3, либо через b7. Черные должны стараться предотвратить это вторжение. Рассмотрим различные положения белого короля и определим соответственные поля для черного. Начнем с критических полей вторжения — f3 и a6. Если белый король стоит на f3, то черный должен держать поле g4 и, значит, стоять на g5 (при короле на h5 он не успевает на ферзевый фланг). Итак, поля f3 и g5 — соответственные, записываем на них число 1, красным цветом для белого короля, черным — для черного. Если белый король пришел на a6, то черный должен встретить его на b8 (2). Пусть теперь белый король стоит на e2. Поскольку он грозит занять за один ход поле 1 и за четыре хода поле 2, черный король должен расположиться на f6 (на e2 и f6 ставим 3).

Белый король может пойти с a5 и b5 на a6, и, значит, этим полям соответствует c8 (4). На поля с числом 4 белый король может попасть с b4 и c4, и им соответствует поле d8 (5). С d3 король может пойти на поля 3 и 5, то есть ему соответствует поле e7 (6). Аналогично с c3 король может занять поля 5, 6, и ему соответствует e8 (7). С d2 у короля есть ходы на поля 3, 6, 7, и ему соответствует f7 (8). Остальные поля роли не играют и мы не обращаем на них внимания.

Итак, соответствие полей здесь не взаимно однозначное — двум парам белых полей соответствует по одному черному, это и решает дело:

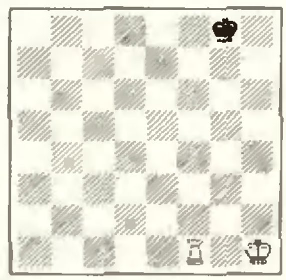
1. Крf3 Крg5 2. Крe2 Крf6 3. Крd3 (3. Крd2 Крf7) **3...Крe7 4. Крc4** (4. Крc3 Крe8) **4...Крd8.** До сих пор у черных находился нужный ответ, но после **5. Крb4!** белый король остался на поле с числом 5, черные теряют соответствие и проигрывают: на 5...Крe7 (e8) следует 6. Крb5, а на 5...Крc8 — 6. Крc3, и на одном из участков доски белый король прорывается к черным пешкам.

В данном примере у черных очень мало возможностей для маневра, и поэтому белые могли даже позволить себе неточность. Например, если бы они пошли 5. Крb5 (вместо Крb4), то после 5...Крc8 исправили бы ошибку — 6. Крa5! и т. д. Однако очень часто в подобных позициях один неточный ход приводит к непоправимым последствиям.



В этой позиции решает только **1. Крa2!**, и черные теряют поля соответствия. В данном примере в лагере обеих сторон довольно много полей для маневров, и анализ значительно усложняется (см. «Квант», 1971, № 12).

Закончим наш краткий рассказ следующей задачей.



Белые начинают и выигрывают

Читателя может смутить задание, ведь у белых на доске лишняя ладья. Однако здесь имеется одно дополнительное условие — ладье разрешается ходить только в том случае, если она... объявляет мат!

После **1. Крg2!** белые занимают оппозицию (королей разделяет нечетное число полей — пять). Если теперь черный король движется по линии «g», то оппозиция сохраняется — **1...Крg7 2. Крg3!** три поля) **2...Крh6 3. Крg4!** (одно поле). Итак, черные вынуждены отступить от вертикали «g» — **3...Крh6 4. Крf5!** До сих пор белый король не мог встать перед ладьей, так как его черный оппонент сразу вырывался на свободу через линию «f». Теперь же такая возможность появилась, и белые осуществляют обходный маневр. **4...Крg7** (4...Крh6 5. Лh1×) **5. Крg5!** (вновь оппозиция завоевана) **5...Крh7 6. Крf6! Крg8 7. Крg6! Крh8 8. Лf8×.**

МГД-генератор

1. Масса ионов во много раз больше массы электронов, поэтому ионы движутся много медленнее электронов и заметного тока не создают.
2. Горячие газы можно использовать, например, для теплофикации. Подогревать топливо и воздух имеет смысл, так как в этом случае меньшая доля теплотворной способности топлива тратится на нагрев продуктов сгорания.
3. Да, имеет, но при этом внутреннее сопротивление генератора возрастает, так как газ охлаждается от электродов и степень ионизации присадки уменьшается.
4. Для уменьшения потребления мощности электромагнитом надо уменьшить сопротивление его обмоток, охладив их. Радикальное решение этой проблемы — использовать сверхпроводящий магнит.
5. Недостаток — потери в теплообменнике между продуктами сгорания и контуром с аргоном. Достоинство — турбина не контактирует с активными газами или присадками.

Физический фейерверк

1. Палочка с зарубками совершает и горизонтальные, и вертикальные колебания, поэтому конец палочки и прикрепленный к нему гвоздик движутся по эллипсу. В зависимости от того, каким пальцем вы прижимаете палочку с зарубками и по какой ее стороне проводите другой палочкой, конец палочки и гвоздик движутся либо по часовой стрелке, либо против. Трение же между гвоздиком и пропеллером заставляет пропеллер вращаться в соответствующем направлении.
2. Сначала вода заполняет первый виток шланга, затем часть ее переливается во второй. Вскоре второй виток заполняется, а в верхней части первого образуется воздушная полость и течение воды прекращается. При большем уровне воды в трубке с воронкой то же самое может произойти во втором витке, в третьем и т. д. Если высота столба воды ограничена, а число витков велико, в конце концов напора воды окажется недостаточно, чтобы проталкивать воздушные полости дальше и дальше, и ток воды прекратится.
3. Картонку удерживают силы атмосферного давления и поверхностного натяжения. Когда вы переворачиваете стакан, столб воды в нем немного опускается и давление воздуха в верхней части стакана становится ниже атмосферного. Разность между атмосферным давлением и давлением над жидкостью и создает силу, которая не дает воде вылиться из стакана. Вторая сила, сила поверхностного натяжения, обусловлена молекулярным притяжением между водой и картонкой, водой и стенками стакана.
4. Поскольку рассматриваемая система неустойчива, всякое небольшое возмущение поверхности воды (небольшая волна) быстро нарастает, равновесие нарушается и вода из стакана начинает вытекать.
5. Температура и соленость воды с глубиной уменьшаются. Холодная малосоленая вода, поднимаясь со дна, согревается и становится легче, чем соленая вода на поверхности. Вот почему поток воды со дна не прекращается. Более того, он может продолжаться даже без трубки.
6. Это явление аналогично рассмотренному в предыдущей задаче. Движение возникает из-за малых возмущений (небольших волн) на поверхности раздела слоев воды. Окрашенная соленая вода, опускаясь, отдает тепло пресной неокрашенной, становится плотнее ее и поэтому продолжает опускаться вниз. Неокрашенная вода, поднявшись вверх вследствие случайной небольшой волны, согреется и окажется легче окружающей окрашенной воды, в результате чего ее движение вверх будет продолжаться.
7. На поверхности раздела соленой и пресной воды наблюдается неустойчивость того же типа, что и в задачах 4 и 6.
8. По-видимому, никаких публикаций по этому поводу, кроме описаний самого опыта, не было. Попробуйте поэкспериментировать сами. Подумайте, каково давление над яйцом и под ним. Играет ли какую-либо роль турбулентность струи? Будет ли яйцо двигаться навстречу потоку, если оно окажется в узкой горизонтальной струе?
9. Так как плотность холодного молока больше, чем горячего кофе, струйка молока движется вниз. Прилегающие слои вращающегося кофе захватываются потоком молока и вытягиваются вниз. В результате угловая скорость вращения этих слоев увеличивается и может стать достаточной для образования на поверхности кофе воронки. Когда в кофе наливают горячее молоко, оно либо совсем не опускается, либо опускается гораздо медленнее, чем холодное.
10. Поведение всех тонущих или всплывающих предметов определяется характером изменений, которые они вносят в поток обтекающей их жидкости. Однако до сих пор не существует теоретического или хотя бы качественного объяснения наблюдаемых при этом явлений.

Морской бой

1. а) 7 стратегий (рис. 1, *а*) — *ж*)); напомним, что стратегии, совпадающие при поворотах и отражениях доски, мы не различаем. б) Сдвигая квадрат 4×4 с каждой из семи указанных стратегий вверх и вправо на 4 поля, мы получаем множество стратегий на доске 10×10. Однако только две стратегии из этого множества являются наилучшими (они содержат по 24 выстрела) — рис. 2, *а*), *б*); сравните с рисунками 1, *а*), *б*). Убедитесь сами, что любая наилучшая стратегия на доске $n\times n$ ($n>4$) получается сдвигами на 4 поля некоторой наилучшей стратегии на доске 4×4.

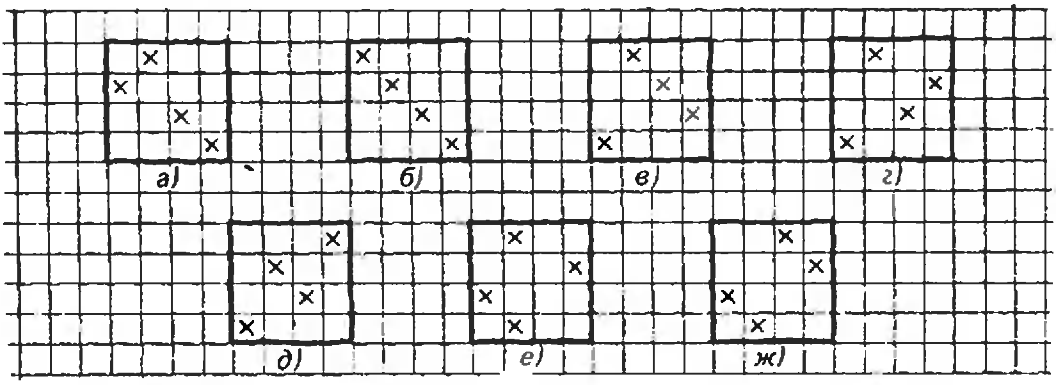


Рис. 1.

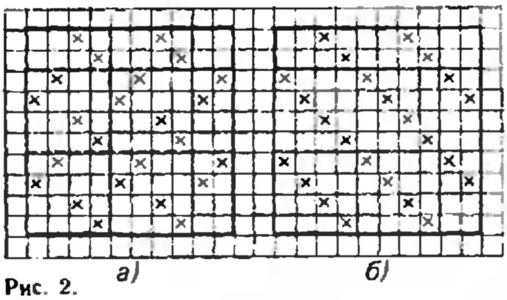


Рис. 2.

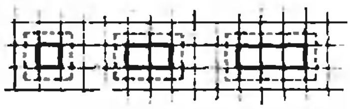


Рис. 3.

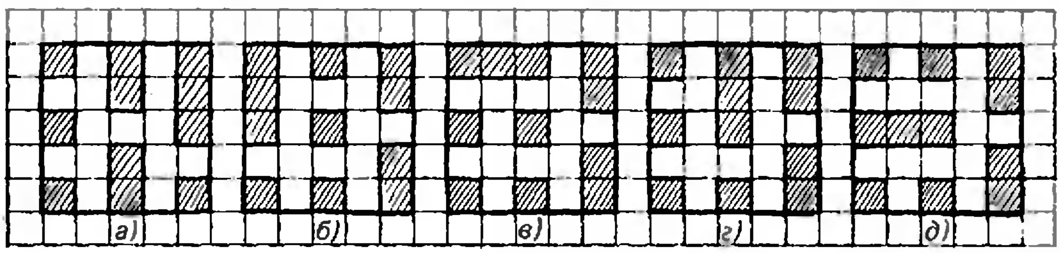


Рис. 4.

2. По правилам игры любая пара кораблей должна отстоять друг от друга не меньше чем на одно поле. Окружим каждый корабль каймой шириной в половину поля (рис. 3); полученный прямоугольник назовем *расширенным кораблем*. Найдем площадь семи расширенных кораблей, которые нам надо потопить. Площадь расширенного катера — 4 клетки (2×2), эсминца — 6 клеток (3×2), крейсера — 8 клеток (4×2). Общая площадь составляет 36 клеток. Площадь расширенной доски также равна 36 клеткам, то есть расширенные корабли полностью покрывают ее. Из этого следует, что угловые поля доски 5×5 обязательно заняты кораблями (иначе угловая площадь расширенной доски «пропадает»). Теперь легко перебрать все возможные расположения кораблей. Их всего пять (рис. 4, *а) — д)*; повороты и отражения доски мы не учитываем).

Проведенный анализ позволяет эффектно завершить игру. Первые четыре выстрела произведем по углам нашей доски 5×5. Как мы знаем, все они достигают цели. Если при этом три катера будут потоплены (рис. 4, *а*), то расположение остальных кораблей определяется однозначно. Пусть потоплен только один катер. Сориентировав доску так, чтобы этот катер стоял на поле а1, пятый и шестой выстрелы произведите по полям а3 и в1. От результатов этих двух выстрелов зависит, какой из случаев — «б» или «в» — имеет место. Если выстрелы по углам приводят к потоплению двух катеров, то, сориентировав доску так, чтобы эти катера стояли на вертикали а, пятый и шестой выстрелы произведите снова по полям а3 и в1. По результатам этих выстрелов вы поймете, какой из случаев — *г)* или *д)* — избран противником.

Таким образом, после шести ходов мы имеем полную информацию о расположении неприятельских кораблей и следующими пятью ударами победно завершаем этот напряженный бой. Рассмотренный пример показывает, что в критических ситуациях от играющих в морской бой требуются немалое искусство и выдержка.

Сколько вариантов

1. 9^4. **2**. $2\cdot19\cdot9\cdot5\cdot3\cdot2^4=41\,040$. **3.** $33^3\cdot10^4=359\,370\,000$. **4.** 88^6. **5а.** $9\cdot10^2=900$. **5б.** $9\cdot9\cdot10^3=81\,000$. **5в.** $5\cdot4\cdot7\cdot7\cdot6=5\,880$. Цифры выбираем в следующем порядке: вторая, четвертая, первая, третья, пятая. **5г.** $2\cdot5\cdot6^3=2\,160$. Сначала выбираем пятую цифру (2 или 6), затем четвертую

(любую нечетную), третью, вторую, первую.
6. Правое неравенство следует из того, что первое звено ломаной можно выбрать четырьмя способами, а каждое следующее — не более чем тремя. Для доказательства левого неравенства рассмотрите ломаные, в которых каждое звено направлено на «север» или на «запад». **7.** 7! **8.** 8! **9.** 9! Замените цифры 6 и 9 одной «цифрой» 96. **10.** 4! $(10!)^4$. **11.** 12 • 8! Сначала поставим цифры 2 и 3, а затем оставшиеся восемь цифр на восьми свободных местах. **12.** 2^9. Выберите множество монет, попадающих в левый карман.

Силы трения и движение

1. При $\alpha < \mathrm{arctg}\,\mu$ $|\vec{F}_{тр}| < mg\sin\alpha$;
при $\alpha > \mathrm{arctg}\,\mu$ $|\vec{F}_{тр}| = \mu mg\cos\alpha$ рис. 1
2. $L = \dfrac{2l\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \approx 2l\mu = 0{,}1$ м.
3. $|\vec{a}_{max}| = \mu g$; сила направлена в ту же сторону, что и ускорение.
4. $N = \mu m|\vec{v}|/\eta \approx 84$ кВт.
5. Выгоднее затормозить.
6. Брусок будет соскальзывать вниз.

Магические восьмиугольники

(см. 4-ю с. обложки)
Квадрат по диагонали:

21	17	13	9	5
14	10	1	22	18
2	23	19	15	6
20	11	7	3	24
8	4	25	16	12

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)
1. $156 \times 7606 = 1\,186\,536$.
2. Пусть a и b — длины катетов прямоугольного треугольника ABC; c — длина гипотенузы. Тогда (рис. 5) $|ED| = a+b-c$. Но $a = r+x$, $b = r+y$, $c = x+y$, где r — радиус вписанной окружности (рис. 6).
Значит, $|ED| = r+x+ry-x-y = 2r$.
3. Ответ. Верно.
Посмотрим на последние две цифры степеней тройки. Получим такой набор чисел:
03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49,
47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01, 03,...
Мы видим, что среди первых двадцати степеней тройки действительно нет таких, у которых цифра десятков была бы нечетной. Но, начиная с двадцать первого, числа в нашем наборе будут повторяться. Поэтому так будет для всех степеней тройки.
4. Ответ. Верно.
Составим такую таблицу:

	Голубоглазые	Неголубоглазые
Блондины	a	c
Неблондины	b	d

Тогда $\dfrac{a}{b} > \dfrac{a+c}{b+d}$. Отсюда $ad > bc$, то есть $\dfrac{a}{c} > \dfrac{a+b}{c+d}$.
5. Нетрудно сообразить, что $a = 2$. Поэтому $(2\overline{bc})^2 = \overline{bc1bc}$ или $(200+\overline{bc})^2 = 1001\overline{bc}+100$, откуда $\overline{bc}^2 - 601\overline{bc} + 39900 = 0$ и $\overline{bc} = 76$. Таким образом, $\overline{abc} = 276$.

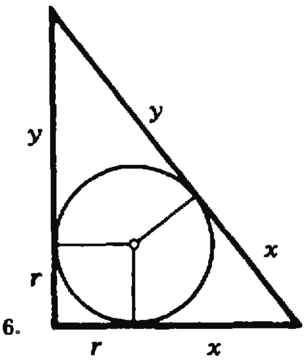


Рис. 6.

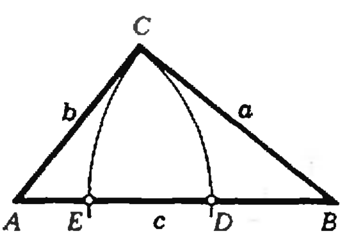


Рис. 5.

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихванович

Номер оформили:
Г. Красиков, Н. Кузьмина, Э. Назаров, М. Сидоров, И. Смирнова, Л. Черниевская

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

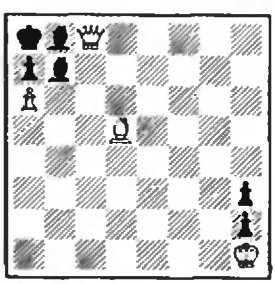
113035 Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 12.9.80
Подписано в печать 20.10.80.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,60 Т-17665
Цена 30 коп. Заказ 2277
Тираж 260 460 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Загадочные маневры

Когда мы говорили об оппозиции или о полях соответствия, то прежде всего имели в виду маневры королей. Однако в шахматах оппозиция иногда понимается более широко. Пусть в некоторой позиции большинство фигур прикованы к своим местам, а по одной или по две с каждой стороны могут перемещаться по доске, причем между полями, занимаемыми ими, существует определенная зависимость, соответствие. Тогда мы вновь можем говорить о соответственных полях и, в частности, об оппозиции. Расскажем об одном случае, имеющем отношение к данной теме.

Дело происходило 15 лет назад в одной студенческой компании сильных математиков (но не очень сильных шахматистов!). Ведущий странички, тогда еще сам студент, в качестве развлечения предложил своим коллегам следующую задачу на так называемый «обратный мат»:

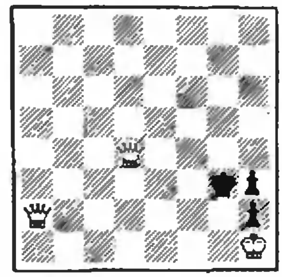


Белые начинают и заставляют черных дать мат их королю, хотя черные этого не хотят.

Поскольку задание было непривычным, я решил сначала... показать собравшимся, как ставится мат, и взял себе белые фигуры: **1. Cg2 Cd5 2. Фd8 Cb7 3. Ce4 Cc6 4. Фc8 Cb7 5. Cd5 Cc6. 6. Фh8 Cb7 7. Cc6,** и черные вынуждены сыграть **7...C:c6**×.

Студенты сказали, что им все ясно, и тогда я сел играть за черных. Однако после **1. Cg2 Ce4 2. Фd8 Cd5 3. Фe8 Cc6 4. Фf8 Cb7 5. Фh8 Cf3 6. Фd8 Cd5 7. Ce4 Cb7 8. Фc8 Cc6 9. Cd5 Cb7** они с огорчением заметили, что вновь возникла исходная позиция. Так повторилось несколько раз — я, играя белыми, добивался цели, а партнеры тем же цветом никак не могли заставить черных поставить мат. В конце концов было заключено пари, и моим соперникам предстояло самостоятельно раскрыть секрет загадочных маневров ферзей и слонов. Ю. Ильяшенко и Н. Петри (ныне — кандидаты физико-математических наук) начали составлять таблицы соответствия полей между белыми фигурами и черным слоном, и вскоре (ведь они были сильные математики!) точный закон был установлен! Оказывается, как бы белый ферзь ни перемещался по восьмой горизонтали, никакая сила не заставит черных, выбирающих соответственные поля для слона, поставить мат белому королю! Черные должны лишь соблюдать следующее правило. При ферзе на c8 им надо держать между слонами расстояние одно поле по диагонали (как в исходной позиции), при ферзе на d8 — расстояние два поля, при ферзе на e8 — три поля, при ферзе на f8 — четыре поля, наконец, при ферзе на h8 черный слон должен стоять вплотную к белому. Итак, мы по существу имеем пять замечательных оппозиций! Вот примерный ход событий: **1. Cg2 Ce4!** (при ферзе на c8 — дистанция одно поле) **2. Cf3 Cd5 3. Фe8 Cb7!** (ферзь на e8 — три поля) **4. Фd8 Cd5!** (два поля) **5. Ce4 Cb7 6. Cg2** (нельзя **6. Фf8 C:e4+**, и это не мат, так как есть ход **7. Фf3**) **6...Ce4 7. Фf8 Cb7!** (четыре поля) **8. Фd8** (слон вновь не может двигаться из-за взятия) **8...Cc6 9. Фh8 Cf3!** (слон вплотную) **10. Фc8 Ce4 11. Фd8 Cd5** и т. д.

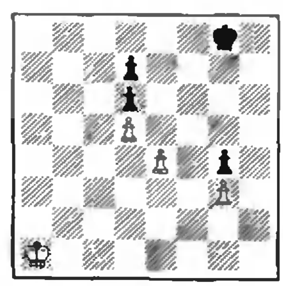
Итак, «доказав», что задача не решается, мои коллеги почти выиграли пари. Почти — потому что у белых есть другой план, связанный с отступлением черного ферзя с последней горизонтали. После **1. Фc1!! Cc6 2. Фa1 Cb7 3. Cc6** черные вынуждены сделать ход слоном b8. После этого белые забирают сначала одного слона — **4. C:b7+**, а потом и второго, а также пешку a7, затем они своего слона отдают, а пешку проводят в ферзи. Далее при помощи двух ферзей они сооружают такую позицию:



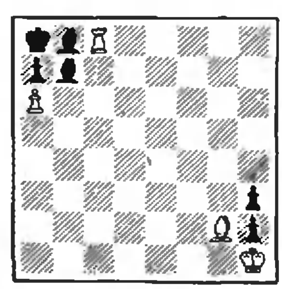
Теперь следует **Фa2—g2+**, и черные вынуждены объявить мат **h3:g2**×!

Этот пример иллюстрирует одно из основных различий (в типе мышления) между математикой и шахматами: решение математической задачи требует точного и глубокого исследования, сосредоточенного на узком участке (которое студенты-математики успешно проделали), а в шахматной игре число вариантов необозримо велико, все их учесть невозможно, и решения (ходы) ищутся лишь приблизительно. Самый глубокий и доскональный анализ, как мы видели, может быть совершенно неожиданно опровергнут!

Конкурсные задания:



1. Оцените позицию при ходе белых и при ходе черных.



2. Обратный мат в 9 ходов.

Срок отправки решений — **31 декабря 1980 г.** (с пометкой на конверте **«Шахматный конкурс № 11—80»**).

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Магические восьмиугольники

(См. текст на с. 37)